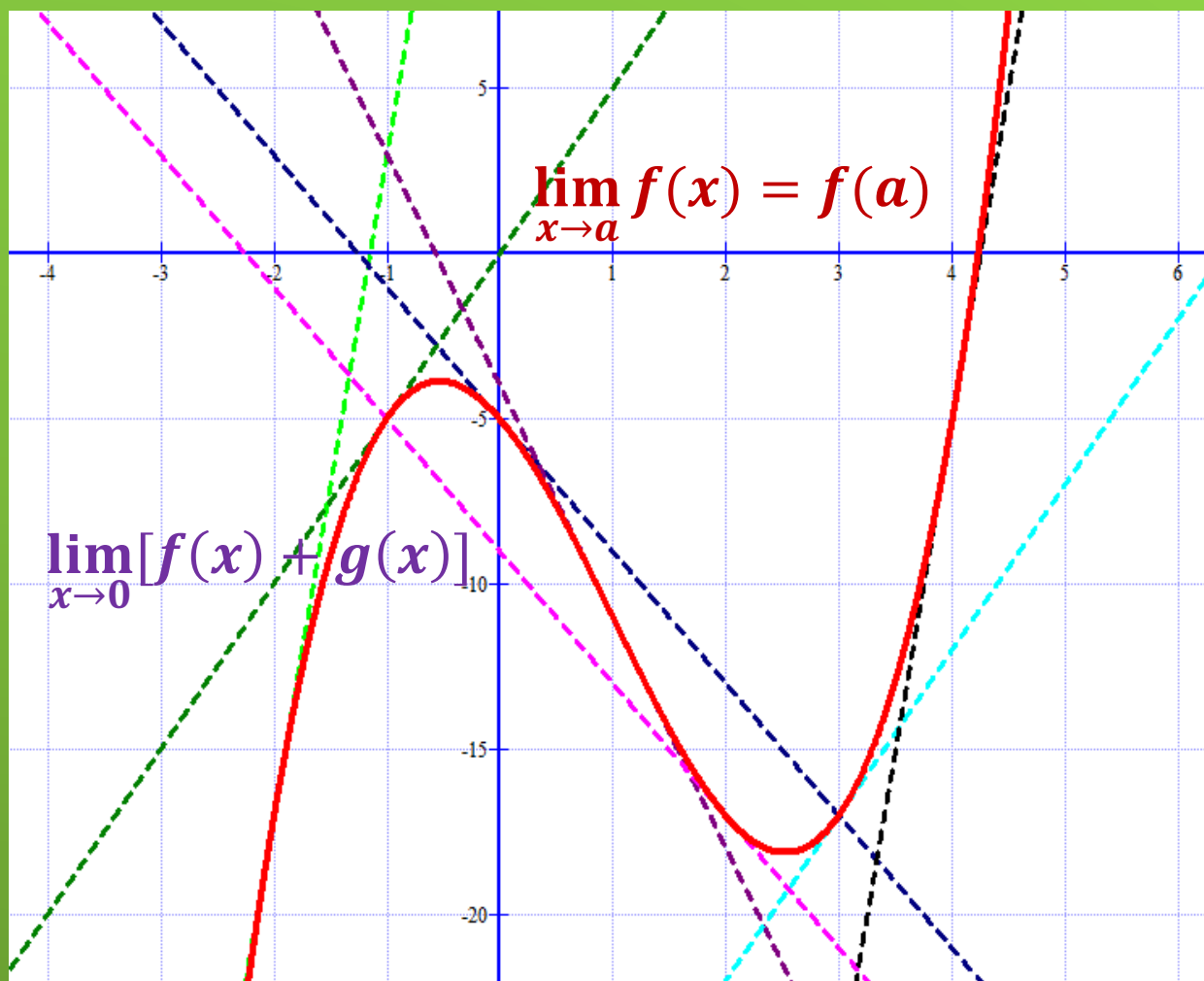


$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) * g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}; \quad g(x) \neq 0$$



Límites de Funciones Reales con Graph versión 4.4.2

Yersi Luis Huamán Romaní
María Verónica Seminario Morales
María Gregoria Sánchez Prieto
Lucy Marisol Reyes Arteaga
José Luis Estrada Pantia

ColloQUIUM
Editorial - Centro de Formación

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)]$$



Yersi Luis Huamán Romaní
Universidad Nacional de Frontera
<https://orcid.org/0000-0001-7209-7727>
yhuaman@unf.edu.pe
yhromani@gmail.com

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas especialidad Matemáticas de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, con número de registro 1469 del Colegio de Matemáticos del Perú (COMAP). Magister en Docencia Universitaria y Gestión Educativa, doctorando en Educación. Docente de categoría Asociado con experiencia en Docencia Universitaria por más de 11 años dictando cursos de Matemáticas en diferentes Universidades del Perú. Con pasantías a nivel Nacional e Internacional.



María Verónica Seminario Morales
Universidad Nacional de Frontera
<https://orcid.org/0000-0002-6787-7371>
mseminario@unf.edu.pe
marvesemi@gmail.com

Lic. En Matemática egresada de la Universidad Nacional de Piura. Con maestría y doctorado en Educación. Docente Universitaria, en la categoría de Auxiliar en la Universidad Nacional de Frontera.



María Gregoria Sánchez Prieto
Universidad Nacional de Frontera
<https://orcid.org/0000-0002-1391-8406>
msanchezp@unf.edu.pe
magsanpri@gmail.com

Licenciada en Matemática, egresada de la Universidad Nacional de Piura, con número de registro 1333 del Colegio de Matemáticos del Perú (COMAP). Magister en Matemática Aplicada, doctoranda en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Piura. Docente de la Facultad de Ingeniería Económica. Amplia experiencia de 20 años de docencia universitaria en diferentes universidades del Perú.



Lucy Marisol Reyes Arteaga
Universidad Nacional de Frontera
<https://orcid.org/0000-0001-8527-9861>
lucyreyes.a@gmail.com

Licenciada en Matemática, Magister en Matemática Aplicada. Docente adscrita a la Facultad de Ingeniería Económica de la Universidad Nacional de Frontera de Sullana – Piura – Perú.



José Luis Estrada Pantia
Universidad Nacional José María Arguedas
<https://orcid.org/0000-0002-6138-9043>
jestrada@unajma.edu.pe
joselep2011@hotmail.es

Magister en Educación, Docente de la Facultad de Ingeniería, Con una amplia experiencia de 19 años de docencia universitaria en diferentes universidades del Perú.

Límites de Funciones Reales con Graph versión 4.4.2

Yersi Luis Huamán Romaní
María Verónica Seminario Morales
María Gregoria Sánchez Prieto
Lucy Marisol Reyes Arteaga
José Luis Estrada Pantia

Límites de Funciones Reales con Graph versión 4.4.2

Yersi Luis Huamán Romaní
María Verónica Seminario Morales
María Gregoria Sánchez Prieto
Lucy Marisol Reyes Arteaga
José Luis Estrada Pantia

Editd by Colloquium
ISBN: 978-9942-600-09-7
First edition 2021
<https://doi.org/10.31876/345>

The book was reviewed by academic peers before its editorial process, in case you require certification you should request it to: sbores@colloquium-editorial.com.
The production or storage of all or part of this publication, including the cover design, as well as its transmission by any means, whether electronic, chemical, mechanical, optical, recording or photocopying, without the authorization of the copyright holders, is strictly prohibited under the penalties of the law.
Ecuador 2021

Índice

Contenido

| | |
|---|-----|
| Índice | iii |
| Prólogo | iv |
| Introducción | 5 |
| CAPÍTULO I | 6 |
| <i>LIMITES DE FUNCIONES REALES</i> | 6 |
| Límite de Funciones Reales | 7 |
| Ejercicios Resueltos de Límites de Funciones | 9 |
| <i>Cálculo de Límites</i> | 26 |
| <i>Cálculo de Límites: Propiedades</i> | 27 |
| Ejercicios Resueltos de Cálculo de Límites..... | 29 |
| Límites Laterales | 41 |
| Ejercicios Resueltos de Límites Laterales | 42 |
| Cálculo de Límites al Infinito | 51 |
| Ejercicios Resueltos de Límites al Infinito | 52 |
| Límites Infinitos | 64 |
| Ejercicios Resueltos de Límites Infinitos..... | 65 |
| Límites de Funciones Trigonométricas..... | 69 |
| Ejercicios Resueltos de Límites Trigonométricos | 70 |
| Límites Exponenciales y/o de la Forma Indeterminada | 79 |
| Ejercicios Resueltos de Límites Exponenciales y/o de la Forma Indeterminada | 82 |
| Referencias Bibliográficas | 88 |

Prólogo

En este texto, se expone el tema de Límites de un función real, con casos muy prácticos acompañado de una gran cantidad de ejercicios selectos como de teoría y una gran cantidad y calidad de ejercicios resueltos de demostración de límites, cálculo de límites, cálculo de las diferentes formas de límites para levantar las indeterminadas; límites trigonométricos, neperianos y exponenciales, este libro servirá para continuar con otra edición de continuidad y tipos de discontinuidad acompañado de una selecta cantidad y calidad de ejercicios bien explicados paso a paso para su mejor entendimiento en la vida universitaria.

Éste es un texto práctico destinado a resolver de forma muy sencilla y bien detallado cada problema de límites: demostración de límites, cálculo de límites en sus diferentes formas, límites de funciones exponenciales, logarítmicas despertará las ganas de seguir buscando mas ejercicios y poder resolverlos.

El presente texto se recomienda para estudiantes de las carreras profesionales de Ingeniería como también para las diversas carreras universitarias Economía, Matemática, Física, Contabilidad, Ingenierías, Enfermería, Biología, Agronomía y las ciencias sociales; con el único fin de estar prestos y listo para resolver cualquier tipo de ejercicios matemáticos que se presente en su vida universitaria.

Las graficas de límites, límites laterales, funciones trigonométricas, funciones exponenciales, logarítmicas y otros, se realizaron con el programa **Graph versión 4.4.2** de acceso libre.

Introducción

El presente texto sobre Límites de funciones reales surge como la necesidad de implementar el uso del software Graph como recurso didáctico, basado en una metodología asertiva que permitirá al estudiante entender el estudio de funciones en términos de su comportamiento, fomentando su razonamiento, análisis, interpretación y juicio crítico.

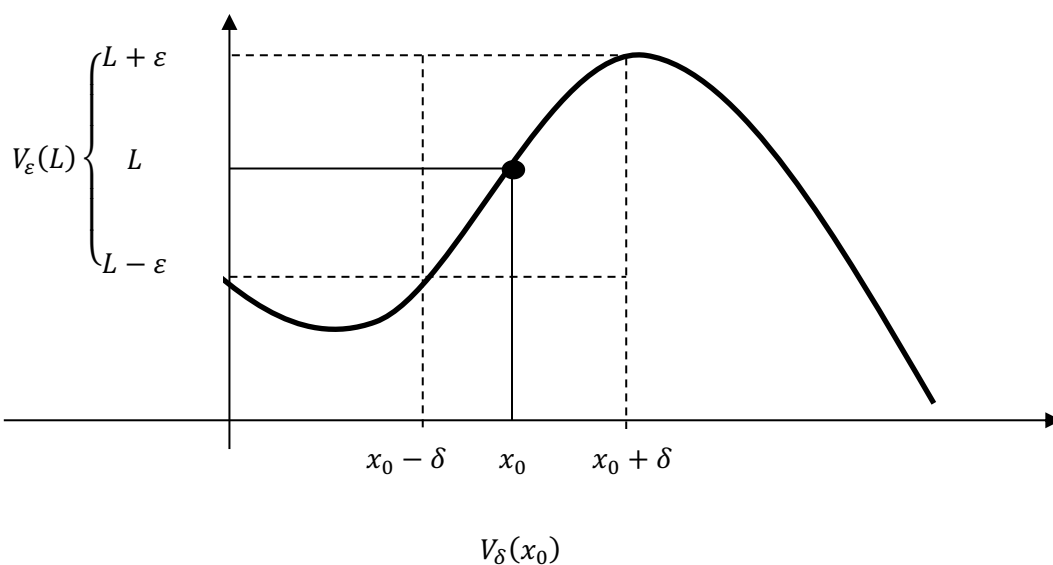
El análisis se remonta a principios del siglo XVII, en donde Newton y Leibniz inventaron el cálculo. En ese siglo y en el posterior siglo XVIII, algunos tópicos del análisis como el cálculo de variaciones, las ecuaciones en derivadas parciales, las ecuaciones diferenciales ordinarias y el análisis de Fourier juntamente con las funciones generadoras se desarrollaron especialmente para un trabajo que se podría aplicar a mundo entero. Las técnicas, métodos y algoritmos del Cálculo son aplicadas con éxito sin ningún problema en la aproximación de los problemas diversos y discretos de la vida y el mundo actual mediante los continuos avances de esta ciencia.

El texto de Límites de Funciones Reales será de gran apoyo para el curso de Cálculo Diferencial, el texto se divide en los siguientes temas del Cálculo de límites donde se tiene ejercicios desarrollados con el uso de la definición de límites (demostración), luego tenemos las diferentes formas de calcular los límites usando propiedades y levantando las diferentes formas indeterminadas, también se tiene una gama de ejercicios resueltos para cada tema con ejercicios selectos; por lo que este libro servirá de base para la segunda edición.

Los Autores

CAPÍTULO I

LIMITES DE FUNCIONES REALES



La matemática te proporciona la disciplina mental para determinar tu posición en el universo e interactuar con la naturaleza como parte fundamental de ella.

Juan Elkin

Límite de Funciones Reales

Vecindad de un número real

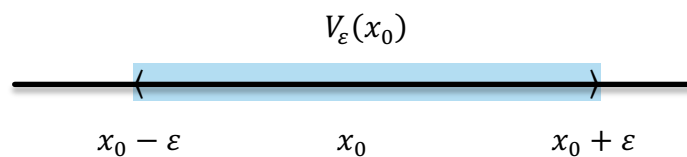
Se llama vecindad o entorno de un número real x_0 al intervalo abierto $\langle x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon \rangle$ que tiene como centro a x_0 y como radio a $\varepsilon > 0$ y se denota por:

$$V_\varepsilon(x_0) = \langle x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon \rangle$$

Es decir:

$$x \in V_\varepsilon(x_0) \leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

Y gráficamente está representado por:



Una vecindad reducida o vecindad con exclusión de x_0 es el entorno sin el número x_0 denotado por:

$$V_\varepsilon^*(x_0) = \langle x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon \rangle - \{x_0\}$$

Así las vecindades de $x_0 = 4$ son los siguientes intervalos

$$V_1(4) = \langle 4 - 2; 4 + 2 \rangle$$

$$= \langle 2; 6 \rangle$$

$$V_2(4) = \langle 4 - 1; 4 + 1 \rangle$$

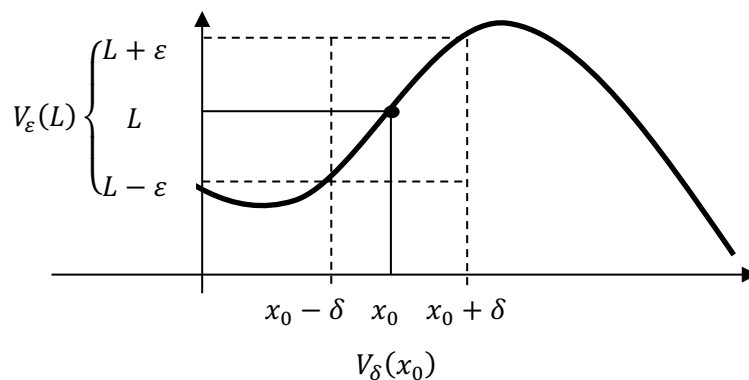
$$= \langle 3; 5 \rangle$$

Definición

Diremos que el número " L " se llama límite de una función " $f(x)$ " cuando " x " se aproxima al punto " x_0 " (" x_0 " no necesariamente pertenece al $Dom f(x)$), si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se cumple que $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, equivalentemente se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{Dom}(f) \wedge |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Gráficamente se tiene:



Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$x \neq x_0, -\delta < x - x_0 < \delta \rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$$x \neq x_0, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$x \neq x_0, x \in V_\delta(x_0) \rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$$

Ejercicios Resueltos de Límites de Funciones

Recordaremos que el

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{Dom}(f) \wedge |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

1) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - x - 2) = 8$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in \text{Dom}(f) \wedge |x - 2| < \delta_1 \rightarrow |3x^2 - x - 2 - 8| < \varepsilon$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |3x^2 - x - 2 - 8| &= |3x^2 - x - 10| \\ &= |(x - 2)(3x + 5)| && |A \cdot B| \leq |A||B| \\ &\leq |x - 2||3x + 5| \quad \dots(1) \end{aligned}$$

Tomamos $\delta_2 = 1$, para acotar $|3x + 5|$ y como

$$|x - 2| < \delta_2$$

$$|x - 2| < 1 \quad |x| < b \leftrightarrow -b < x < b; b \geq 0$$

$$\leftrightarrow -1 < x - 2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

$$3 < 3x < 9$$

$$8 < 3x + 5 < 14$$

Tomemos el

$$\max\{|8|; |14|\} = 14$$

$$-14 < 3x + 5 < 14$$

$$\leftrightarrow |3x + 5| < 14 \quad \dots \dots \dots (2)$$

Reemplazando en (1)

$$= |x - 2||3x + 5|$$

$$\leq \delta_1 \cdot 14 = \varepsilon$$

Es decir que

$$\delta_1 = \varepsilon / 14$$

De donde se toma el

$$\delta = \text{Min} \left\{ \delta_1 = \frac{\varepsilon}{14}, \delta_2 = 1 \right\}$$

$$= \varepsilon / 14$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - x - 2) = 8$$

2) Demostrar el

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

Solución:

Por definición de límite se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{Dom}f \wedge |x - 1| < \delta \Rightarrow |2x + 1 - 3| < \varepsilon$$

Entonces

$$|2x + 1 - 3| = |2x - 2|$$

$$= |2(x - 1)|$$

$$= 2|x - 1|$$

$$< 2\delta = \varepsilon$$

$$\delta = \varepsilon / 2$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

3) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + x - 4) = 14$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in D_f \wedge |x - 2| < \delta_1 \rightarrow |4x^2 + x - 4 - 14| < \varepsilon$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
|4x^2 + x - 4 - 14| &= |4x^2 + x - 18| \\
&= |(x - 2)(4x + 9)| \\
&\leq |x - 2||4x + 9| \quad \dots \dots (1)
\end{aligned}$$

Sea: $\delta_2 = 1$

$$|x - 2| < \delta_2$$

$$|x - 2| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1$$

$$1 < x < 3 \dots \dots \dots (por\ 4)$$

$$4 < 4x < 12 \dots \dots \dots (+9)$$

$$13 < 4x + 9 < 21$$

$$\max\{|13|; |21|\} = 21$$

$$-21 < 4x + 9 < 21$$

$$\Leftrightarrow |4x + 9| < 21$$

Remplazando en (1)

$$= |x - 2||4x + 9|$$

$$< \delta_1 \cdot 21 = \varepsilon$$

Así:

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{21}$$

$$\delta = \min\left\{\delta_1 = \frac{3}{21}; \delta_2 = 1\right\}$$

$$\delta = \varepsilon/21$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + x - 4) = 10$$

4) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4) = 5$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in D_f \wedge |x - 1| < \delta_1 \rightarrow |x^2 + 4 - 5| < \varepsilon$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
|x^2 + 4 - 5| &= |x^2 - 1| \\
&= |(x - 1)(x + 1)|
\end{aligned}$$

$$\leq |x - 1||x + 1| \dots \dots (1)$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$|x - 1| < \delta_2$$

$$|x - 1| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2 \dots \dots \dots (+1)$$

$$1 < x + 1 < 3$$

Tomamos el

$$\max \{|1|; |3|\} = 3$$

$$-3 < 1 < x + 1 < 3$$

$$-3 < x + 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow |x + 1| < 3$$

Remplazando en (1)

$$= |x - 1||x + 1|$$

$$< \delta_1 \cdot 3 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \varepsilon/3$$

$$\delta = \min \left\{ \delta_1 = \frac{\varepsilon}{3}; \delta_2 = 1 \right\}$$

$$\delta = \varepsilon/3$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4) = 5$$

5) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3) = 1$$

Solución:

Por definición de límite se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in D_f \wedge |x + 1| < \delta \Rightarrow |2x + 3 - 1| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} |2x + 3 - 1| &= |2x + 2| \\ &= |2(x + 1)| \\ &= 2|x + 1| \\ &< 2\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\delta = \varepsilon/2$$

Por lo tanto el

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3) = 1$$

6) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x) = 5$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in D_f \wedge |x - 1| < \delta_1 \rightarrow |3x^2 + 2x - 5| < \varepsilon$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |3x^2 + 2x - 5| &= |(x - 1)(3x + 5)| \\ &\leq |x - 1||3x + 5| \dots (1) \end{aligned}$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$|x - 1| < \delta_2$$

$$|x - 1| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2 \dots \dots \dots (por\ 3)$$

$$0 < 3x < 6 \dots \dots \dots (+5)$$

$$5 < 3x + 5 < 11$$

$$\max\{|5|; |11|\} = 11$$

$$-11 < 5 < 3x + 5 < 11$$

$$-11 < 3x + 5 < 11$$

$$|3x + 5| < 11$$

Remplazando

$$= |x - 1||3x + 5|$$

$$< \delta_1 \cdot 11 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \varepsilon/11$$

$$\delta = \min\left\{\delta_1 = \frac{\varepsilon}{11}; \delta_2 = 1\right\}$$

$$\delta = \varepsilon/11$$

Entonces el

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x) = 5$$

7) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 8$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in D_f \wedge |x - 3| < \delta_1 \rightarrow |x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 8| < \varepsilon$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 8| &= |x^3 - 3x^2 + 3x - 9| \\ &= |(x - 1)^3 - 8| \\ &\leq |x - 1 - 2| |(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 4| \\ &= |x - 3| |x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 4| \\ &\leq |x - 3| |x^2 + 3| \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$|x - 3| < \delta_2$$

$$|x - 3| < 1$$

$$\leftrightarrow -1 < x - 3 < 1$$

$$\leftrightarrow 2 < x < 4 \dots \dots \dots (x)^2$$

$$\leftrightarrow 4 < x^2 < 16 \dots \dots \dots (+3)$$

$$\leftrightarrow 7 < x^2 + 3 < 19 \dots \dots \dots (2)$$

$$\max\{|7|; |19|\} = 19$$

$$-19 < x^2 + 3 < 19$$

$$\leftrightarrow |x^2 + 3| < 19$$

Remplazando en (1)

$$= |x - 3| |x^2 + 3|$$

$$< \delta_1 \cdot 19 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{19}$$

$$\delta = \min \left\{ \delta_1 = \frac{\varepsilon}{19} = \varepsilon_2 = 1 \right\}$$

$$= \varepsilon/19$$

Entonces el

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 8$$

8) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{dom}f \wedge |x - 1| < \delta \rightarrow \left| \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} \right| &= \left| \frac{3x - 3}{2} \right| \\ &= \left| \frac{3(x - 1)}{2} \right| \\ &= \frac{3}{2} |x - 1| \\ &< \frac{3}{2} \delta = \varepsilon \\ \delta &= \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}$$

9) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{dom}f \wedge |x + 1| < \delta \rightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} + 2 \right| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} + 2 \right| &= \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} + 2 \right| \\ &= |x - 1 + 2| \\ &= |x + 1| \\ &< \delta = \varepsilon \\ \delta &= \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

10) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in \text{dom}f \wedge |x - 1| < \delta_1 \rightarrow |x^2 + 1 - 2| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} |x^2 + 1 - 2| &= |x^2 - 1| \\ &= |(x + 1)(x - 1)| \\ &\leq |x + 1| |x - 1| \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$|x - 1| < \delta_2$$

$$|x - 1| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

$$1 < x + 1 < 3$$

Tomamos el $\max = \{1; 3\} = 3$

$$-3 < x + 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow |x + 1| < 3$$

Reemplazando en (1)

$$= |x + 1| |x - 1|$$

$$< 3 \cdot \delta_1 = \varepsilon$$

$$3 \cdot \delta_1 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{3}$$

Tomando el

$$\delta = \min\{\delta_2 = 1; \delta_1 = \varepsilon/3\}$$

$$\delta = \varepsilon/3$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$$

11) Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x - 4) = 1$$

Solución:

Por definición de límite se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x - 4) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in D_f \wedge |x - 5| < \delta \Rightarrow |x - 4 - 1| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} |x - 4 - 1| &= |x - 5| \\ &< \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto el

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x - 4) = 1$$

12) Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) = 2$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in \text{dom} f \wedge |x - 1| < \delta_1 \rightarrow |\sqrt{x} + 1 - 2| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} + 1 - 2| &= |\sqrt{x} - 1| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \right| \\ &= \left| \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} \right| \\ &\leq |x - 1| \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right| \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$|x - 1| < \delta_2$$

$$|x - 1| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

$$0 < \sqrt{x} < \sqrt{2}$$

$$1 < \sqrt{x} + 1 < \sqrt{2} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} < \frac{1}{\sqrt{x} + 1} < 1$$

$$\max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right|; |1| \right\} = 1$$

$$-1 < \frac{1}{\sqrt{x} + 1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right| < 1$$

Reemplazando en (1)

$$= |x + 1| \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right|$$

$$< \delta_1 \cdot 1 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \varepsilon$$

$$\delta = \min \{ \delta_1 = \varepsilon; \delta_2 = 1 \}$$

$$\delta = \varepsilon$$

Por lo tanto, el

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) = 2$$

13) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = -4$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{dom}f \wedge |x + 1| < \delta \rightarrow |3x - 1 + 4| < \varepsilon$$

Entonces

$$|3x - 1 + 4| = |3x + 3|$$

$$= |3(x + 1)|$$

$$= 3|x + 1|$$

$$< 3\delta = \varepsilon$$

$$\delta = \varepsilon/3$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = -4$$

14) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + x - 4) = 14$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in \text{dom}f \wedge |x - 2| < \delta_1 \rightarrow |4x^2 + x - 4 - 14| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} |4x^2 + x - 4 - 14| &= |4x^2 + x - 18| \\ &= |(x - 2)(4x + 9)| \\ &\leq |x - 2||4x + 9| \dots (1) \end{aligned}$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$|x - 2| < \delta_2$$

$$|x - 2| < 1$$

$$\leftrightarrow -1 < x - 2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

$$4 < 4x < 12$$

$$13 < 4x + 9 < 21$$

Tomando el $\max\{|13|; |21|\} = 21$

$$-21 < 4x + 9 < 21$$

$$\leftrightarrow |4x + 9| < 21$$

Reemplazando en (1)

$$= |x - 2||4x + 9|$$

$$< \delta_1 \cdot 21 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{21}$$

$$\delta = \min \left\{ \delta_2 = 1; \delta_1 = \frac{\varepsilon}{21} \right\}$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{21}$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + x - 4) = 14$$

15) Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2x^2 + x + 3) = 3$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in \text{dom} f \wedge |x - 0| < \delta_1 \rightarrow |x^3 + 2x^2 + x + 3 - 3| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} |x^3 + 2x^2 + x + 3 - 3| &= |x^3 + 2x^2 + x + 0| \\ &= |x^3 + 2x^2 + x| \\ &= |x(x^2 + 2x + 1)| \\ &= |x(x + 1)^2| \\ &\leq |x||x + 1|^2 \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

Sea: $\delta_2 = 1$

$$|x| < \delta_2$$

$$|x| < 1$$

$$\leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$0 < x + 1 < 2$$

$$\max\{|0|; |2|\} = 2$$

$$-2 < 0 < x + 1 < 2$$

$$-2 < x + 1 < 2$$

$$\leftrightarrow |x + 1| < 2$$

Remplazando

$$= |x||x - 1|^2$$

$$< \delta_1 \cdot 2 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \varepsilon/2$$

$$\delta = \min \{\delta_2 = 1; \delta_1 = \varepsilon/2\}$$

$$\delta = \varepsilon/2$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2x^2 + x + 3) = 3$$

16) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3$$

Solución:

Por definición de límite se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{dom}f \wedge |x - 2| < \delta_1 \Rightarrow |x^2 - 1 - 3| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} |x^2 - 1 - 3| &= |x^2 - 4| \\ &= |(x + 2)(x - 2)| \\ &\leq |x + 2||x - 2| \quad \dots (*) \end{aligned}$$

Consideremos $\delta_2 = 1$,

$$|x - 2| < \delta_2$$

$$|x - 2| < 1$$

Es decir:

$$|x - 2| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

$$3 < x + 2 < 5$$

$$\max\{|3|; |5|\} = 5$$

$$-5 < 3 < x + 2 < 5$$

$$-5 < x + 2 < 5$$

$$\Leftrightarrow |x + 2| < 5$$

Reemplazado en (*)

$$= |x + 2||x - 2|$$

$$< 5\delta_1 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \varepsilon/5$$

Es decir

$$\delta = \min \left\{ \delta_1 = \frac{\varepsilon}{5}, \delta_2 = 1 \right\}$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3$$

17) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in \text{dom}f \wedge |x - 0| < \delta_1 \rightarrow \left| \frac{1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x+1} - 1 \right| &= \left| \frac{1 - (x+1)}{x+1} \right| \\ &= \left| \frac{1 - x - 1}{x+1} \right| \\ &= \left| \frac{-x}{x+1} \right| \\ &\leq |x| \left| \frac{1}{x+1} \right| \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$|x| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$0 < x+1 < 2$$

$$0 < x+1 \quad \wedge \quad x+1 < 2$$

$$\frac{0}{x+1} < 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x+1}$$

Obs: aquí se aproxima al número entero más próximo

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x+1} < 1$$

$$\max \left\{ \left| \frac{1}{2} \right|; |1| \right\} = 1$$

$$-1 < \frac{1}{x+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x+1} \right| < 1$$

Reemplazando en (1)

$$= |x| \left| \frac{1}{x+1} \right|$$

$$< \delta_1 \cdot 1 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \varepsilon$$

Así

$$\delta = \min \{\delta_2 = 1; \delta_1 = \varepsilon\}$$

$$\delta = \varepsilon$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

18) Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in \text{dom} f \wedge |x + 1| < \delta_1 \rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= |(x + 1)(x - 1)| \\ &\leq |x + 1||x - 1| \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$|x + 1| < \delta_2$$

$$|x + 1| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x + 1 < 1$$

$$-2 < x < 0$$

$$-3 < x - 1 < -1$$

$$\max\{|-3|; |-1|\} = 3$$

$$-3 < x - 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| < 3$$

Reemplazando en (1)

$$= |x - 1||x + 1|$$

$$< \delta_1 \cdot 3 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = \varepsilon / 3$$

Así

$$\delta = \min \{\delta_2 = 1; \delta_1 = \varepsilon / 3\}$$

$$\delta = \varepsilon / 3$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$$

19) Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Solución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in \text{dom} f \wedge |x - 1| < \delta_1 \rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{2 - (\sqrt{x} + 1)}{2(\sqrt{x} + 1)} \right| \\ &= \left| \frac{1 - \sqrt{x}}{2(\sqrt{x} + 1)} \right| \\ &= \left| \frac{-(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{2(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} \right| \\ &= \left| \frac{x - 1}{2(\sqrt{x} + 1)^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |x - 1| \left| \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} \right| \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Sea $\delta_2 = 1$

$$-1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

$$\sqrt{0} < \sqrt{x} < \sqrt{2}$$

$$1 < \sqrt{x} + 1 < \sqrt{2} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} < \frac{1}{\sqrt{x} + 1} < 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 < \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)^2 < 1^2$$

$$\max \left\{ \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 \right|; |1| \right\} = 1$$

$$-1 < \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} < 1$$

$$\leftrightarrow \left| \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} \right| < 1$$

Reemplazando

$$= |x - 1| \frac{1}{2} \left| \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} \right|$$

$$< \delta_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \varepsilon$$

$$\delta_1 = 2\varepsilon$$

Así

$$\delta = \min\{\delta_1 = 2\varepsilon; \delta_2 = 1\}$$

$$\delta = 2\varepsilon$$

Por lo que el

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Cálculo de Límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$$



Las matemáticas no mienten, lo que hay son muchos matemáticos mentirosos.

Henry David Thoreau

Cálculo de Límites: Propiedades

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ y k una constante, entonces:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k.L$

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \pm M$

d) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) * g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L * M$

e) Si $M \neq 0$ y $g(x) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$$

f) Para todo n entero positivo, se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n = L^n$$

g) Para todo n par positivo se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

h) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |L|$

Observaciones:

1. Para poder levantar algunos casos indeterminados recurriremos a algunos trucos matemáticos como el “quita y pon”; separando en dos partes y otros.
2. O a buscar el factor común para poder simplificar tanto en el numerador como en el denominador el factor común que hace que sea indeterminado.

3. O multiplicar por su conjugada de las raíces cuadradas o de raíces pares.
4. Si fuese el caso de raíces impares usaremos la siguiente conjugada.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})$$

5. Para las funciones trigonométricas se usarán también sus conjugadas respectivas.

Ejercicios Resueltos de Cálculo de Límites

1) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

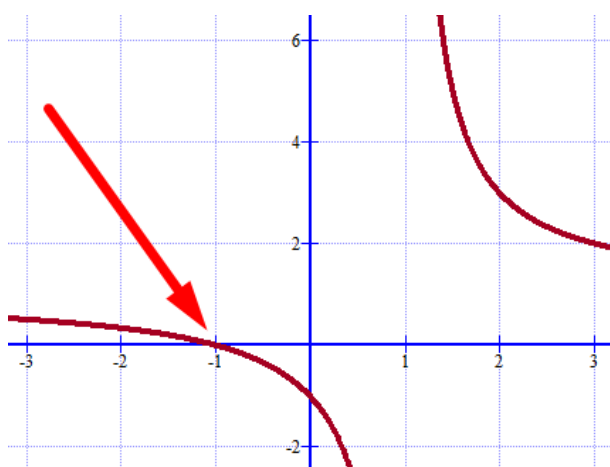
Solución:

Al evaluar el

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado, por lo que tenemos que hacer es levantar la indeterminada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)}{(x - 1)} \\ &= \frac{0}{-2} \\ &= 0 \end{aligned}$$



2) Hallar el

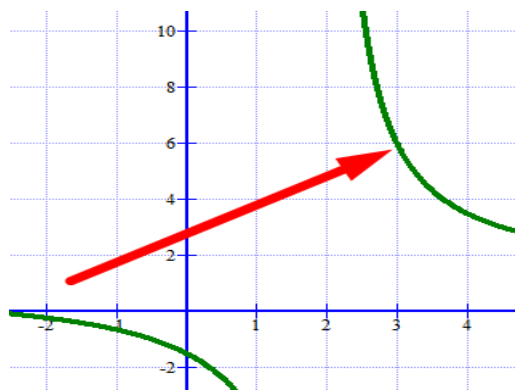
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

Al evaluar el

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado, por lo que levantamos la indeterminada



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x-2)}$$

$$= 6$$

3) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}$$

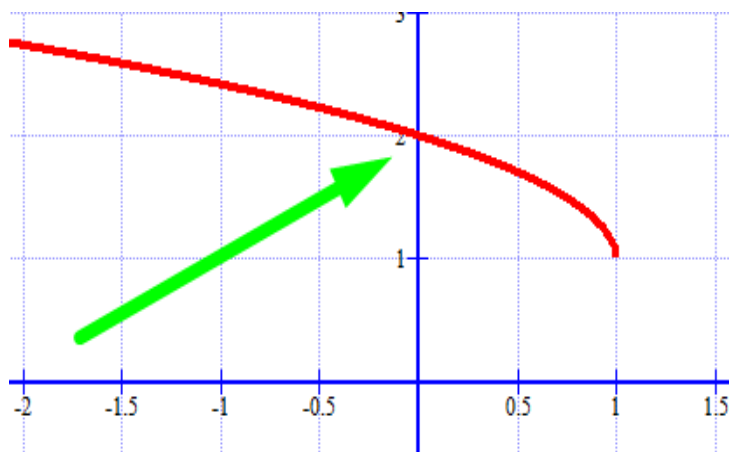
Solución:

Al evaluar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado, por lo que levantaremos la indeterminada multiplicando por su conjugada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1-x} \\ &= 2 \end{aligned}$$



4) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4}$$

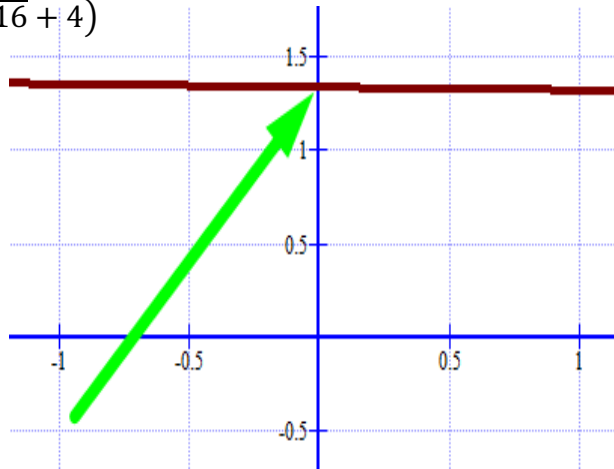
Solución:

Al evaluar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado por lo que levantaremos la indeterminada multiplicando con su conjugada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+9-9)(\sqrt{x+16}+4)}{(x+16-16)(\sqrt{x+9}+3)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+9}+3)} \\ = \frac{8}{6} \\ = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



5) Hallar el

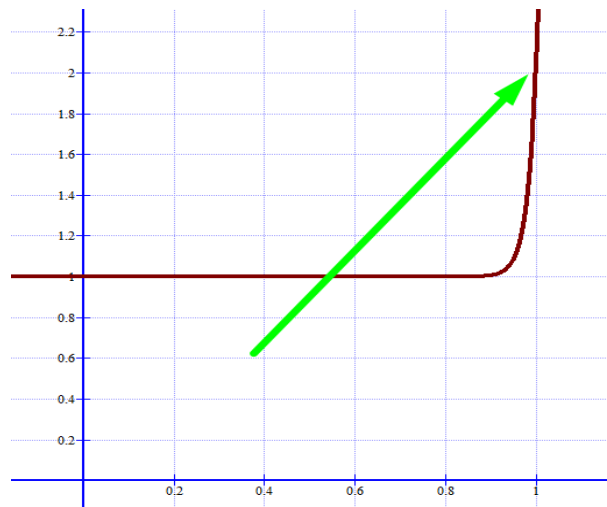
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$$

Solución:

Evaluando el

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado, por lo que levantaremos la indeterminada. Sabiendo que el factor $(x - 1)$ debe estar en ambos miembros, factorizando tenemos;



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{99} + x^{98} + \dots + x - 1)}{(x-1)(x^{49} + x^{48} + \dots + x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{99} + x^{98} + \dots + x - 1)}{(x^{49} + x^{48} + \dots + x - 1)} \\ &= \frac{(1 + 1 + \dots + 1) - 1}{1 + 1 + \dots + 1 - 1} \\ &= \frac{98}{48} = \frac{49}{24} \end{aligned}$$

6) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^4 + x^2}$$

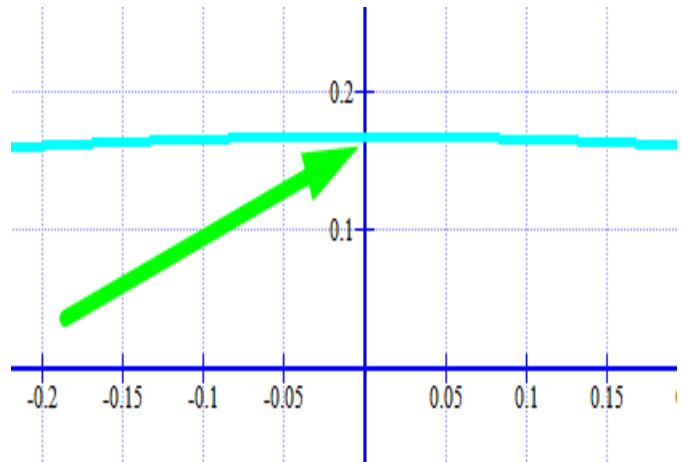
Solución:

Evaluando el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^4 + x^2} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado, por lo que levantaremos la indeterminada multiplicando por su conjugada al denominador

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^4 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 9} - 3)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 9 - 9}{x^2(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \\ &= \frac{1}{3 + 3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$



7) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt[3]{x + 1} - 1}$$

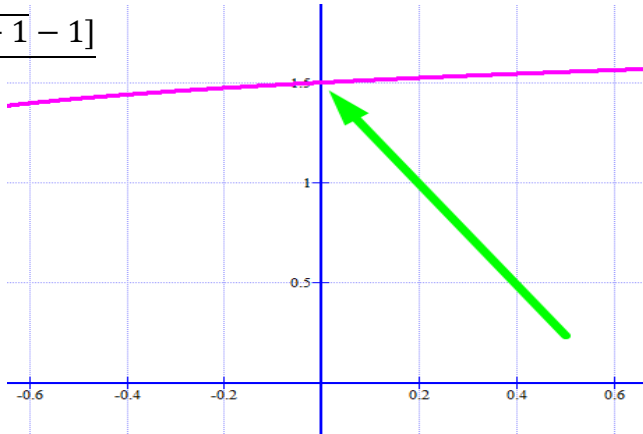
Solución:

Evaluando el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt[3]{x + 1} - 1} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado, por lo que multiplicamos por su conjugada al numerador y denominador

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1) [\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} - 1]}{(\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1) [\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} - 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1+1) [\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} - 1]}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} - 1]}{\sqrt{x+1}+1} \\ &= \frac{[\sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1} - 1]}{\sqrt{1}+1} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



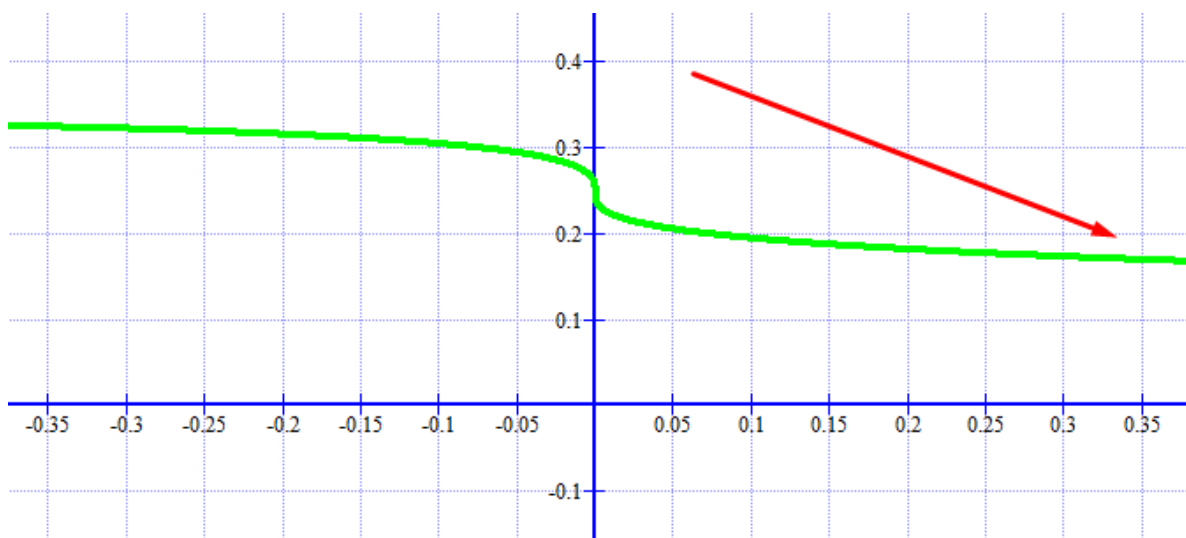
8) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

Solución:

Evaluando el

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \frac{0}{0}$$



Resulta indeterminado por lo que multiplicamos la conjugada al denominador y denominador para levantar la indeterminada.

Recordando que

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)[\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 4]}{(x - 8)[\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 4]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{(x - 8)[\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 4]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 4} \\ &= \frac{1}{4 + 4 + 4} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

9) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2}$$

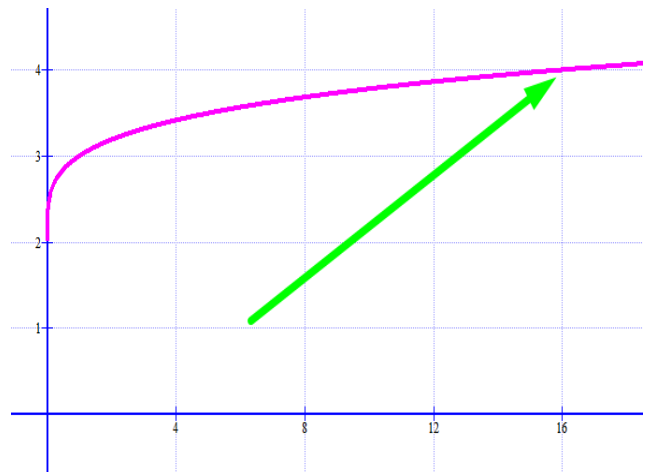
Solución:

Evaluando se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado, por lo que multiplicaremos por su conjugada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt[4]{x} + 2)}{(\sqrt[4]{x} - 2)(\sqrt[4]{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt[4]{x} + 2)}{\sqrt{x} - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} (\sqrt[4]{x} + 2) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$



10) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$$

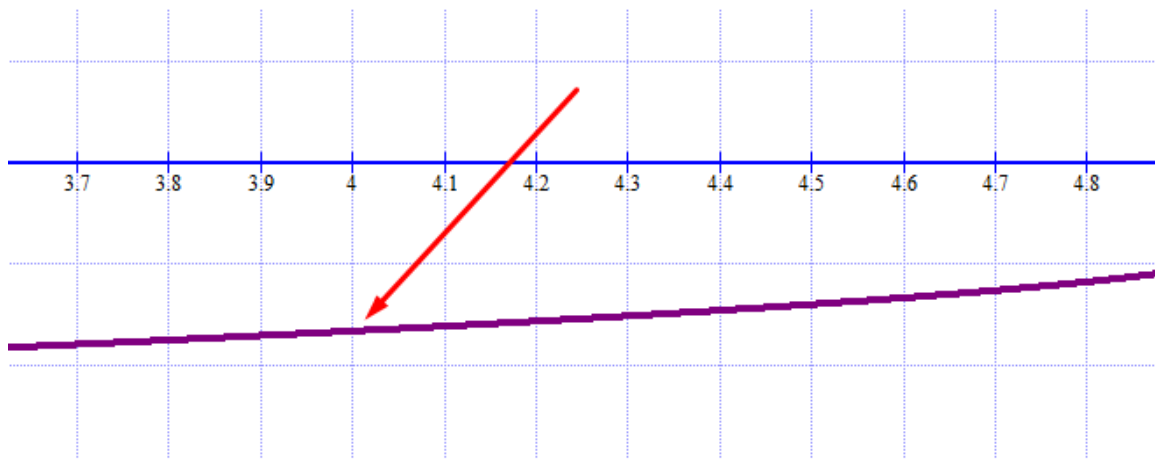
Solución:

Evalutando tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado por lo que se multiplicará por sus respectivas conjugadas

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{5 + x})(3 + \sqrt{5 + x})(1 + \sqrt{5 - x})}{(1 - \sqrt{5 - x})(3 + \sqrt{5 + x})(1 + \sqrt{5 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[9 - (5 + x)][1 + \sqrt{5 - x}]}{[1 - (5 - x)][3 + \sqrt{5 + x}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(1 + \sqrt{5 - x})}{(-4 + x)(3 + \sqrt{5 + x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{1 + \sqrt{5 - x}}{3 + \sqrt{5 + x}} \\ &= -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$



11) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}}$$

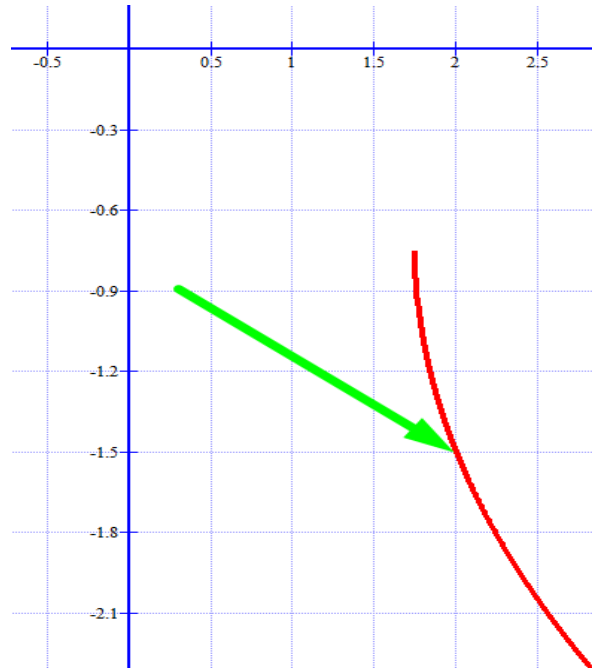
Solución:

Evaluando tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}} = \frac{0}{0}$$

Resultando indeterminado por lo que multiplicaremos por su conjugada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x - 6)(1 + \sqrt{4x - 7})}{(1 - \sqrt{4x - 7})(1 + \sqrt{4x - 7})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)(1 + \sqrt{4x - 7})}{1 - 4x + 7} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)(1 + \sqrt{4x - 7})}{-4(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(1 + \sqrt{4x - 7})}{-4} \\ &= \frac{3(1 + 1)}{-4} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$



12) Hallar el

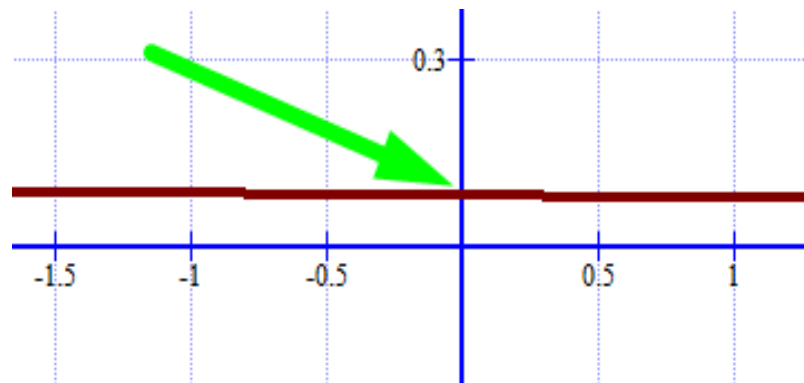
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$$

Solución:

Evaluando el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{8}}{x} = \frac{0}{0}$$

Resulta indeterminado, así que solo nos queda multiplicar por su conjugada



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{8}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{(x+8)^2} + \sqrt[3]{(x+8) \cdot 8} + \sqrt[3]{8^2})}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2} + \sqrt[3]{(x+8) \cdot 8} + \sqrt[3]{8^2})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 8 - 8}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2} + \sqrt[3]{(x+8) \cdot 8} + \sqrt[3]{8^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2} + \sqrt[3]{(x+8) \cdot 8} + \sqrt[3]{8^2})} \\
&= \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

13) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$$

Solución:

Evaluando resulta

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado por lo que usaremos el artificio de aumentar y quitar la misma cantidad de acuerdo al valor que resulte cada raíz cuadrada,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{(x^2 - 2x + 6) - 3} + (3 - \sqrt{x^2 + 2x - 6})}{x^2 - 4x + 3}$$

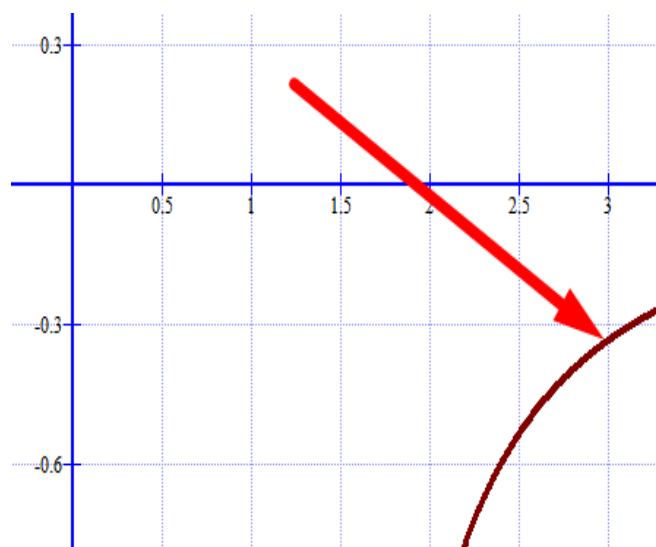
$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 6} - 3)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + 3)}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + 3)}$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - \sqrt{x^2 + 2x - 6})(3 + \sqrt{x^2 + 2x - 6})}{(x^2 - 4x + 3)(3 + \sqrt{x^2 - 2x + 6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 6 - 9}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + 3)} + \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2 - 2x + 6}{(x^2 - 4x + 3)(3 + \sqrt{x^2 - 2x + 6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + 3)} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{(x^2 - 4x + 3)(3 + \sqrt{x^2 - 2x + 6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + 3)} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x-1)(3 + \sqrt{x^2 - 2x + 6})}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+3)} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+5)}{(x-1)(3+\sqrt{x^2-2x+6})} \\
&= \frac{4}{(2)(6)} - \frac{8}{(2)(6)} \\
&= \frac{4}{12} - \frac{8}{12} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

14) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$$

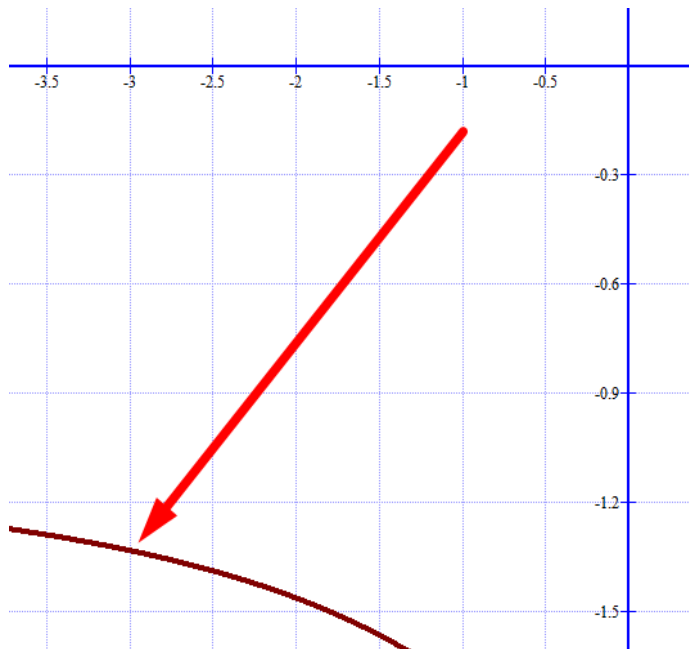
Solución:

Evaluando tenemos

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado, por lo que multiplicaremos por su conjugada

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{x^2+7-16} \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)\sqrt{(x^2+7)+4}}{x^2-9} \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)\sqrt{(x^2+7)+4}}{(x+3)(x-3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2+7}+4}{(x-3)} \\
&= \frac{4+4}{-3-3} \\
&= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$



15) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{5-x}}{1-x^2}$$

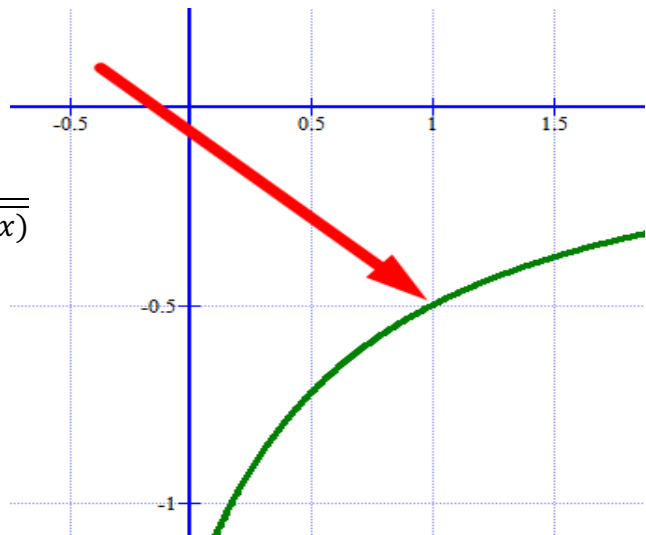
Solución:

Al evaluar se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{5-x}}{1-x^2} = \frac{0}{0}$$

Es indeterminado, así que multiplicaremos por su conjugada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{5-x}}{1-x^2} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{1+3x} - \sqrt{5-x})(\sqrt{1+3x} + \sqrt{5-x})}{(1-x^2)(\sqrt{1+3x} + \sqrt{5-x})} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+3x-5+x}{(x^2-1)(\sqrt{1+3x} + \sqrt{5-x})} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1+3x} + \sqrt{5-x})} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x+1)(\sqrt{1+3x} + \sqrt{5-x})} \\ &= - \frac{4}{(1+1)(2+2)} \\ &= - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



16) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x-1} - \sqrt{2x+2}}$$

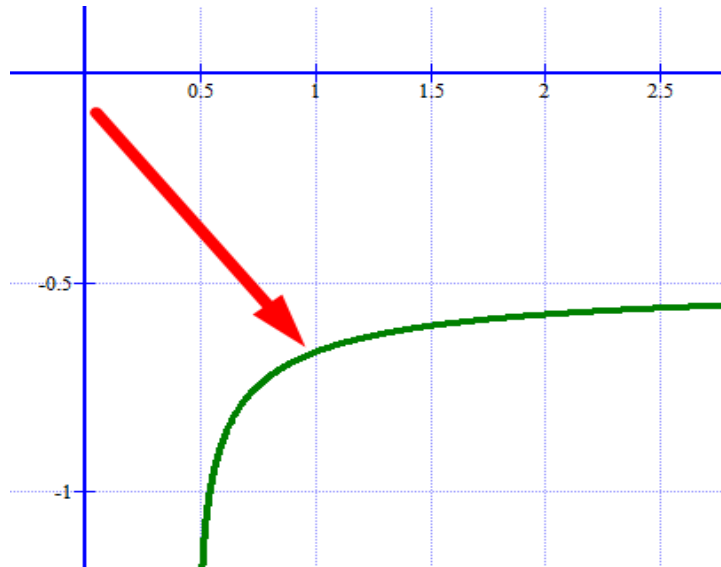
Solución:

Evaluando se tiene que el

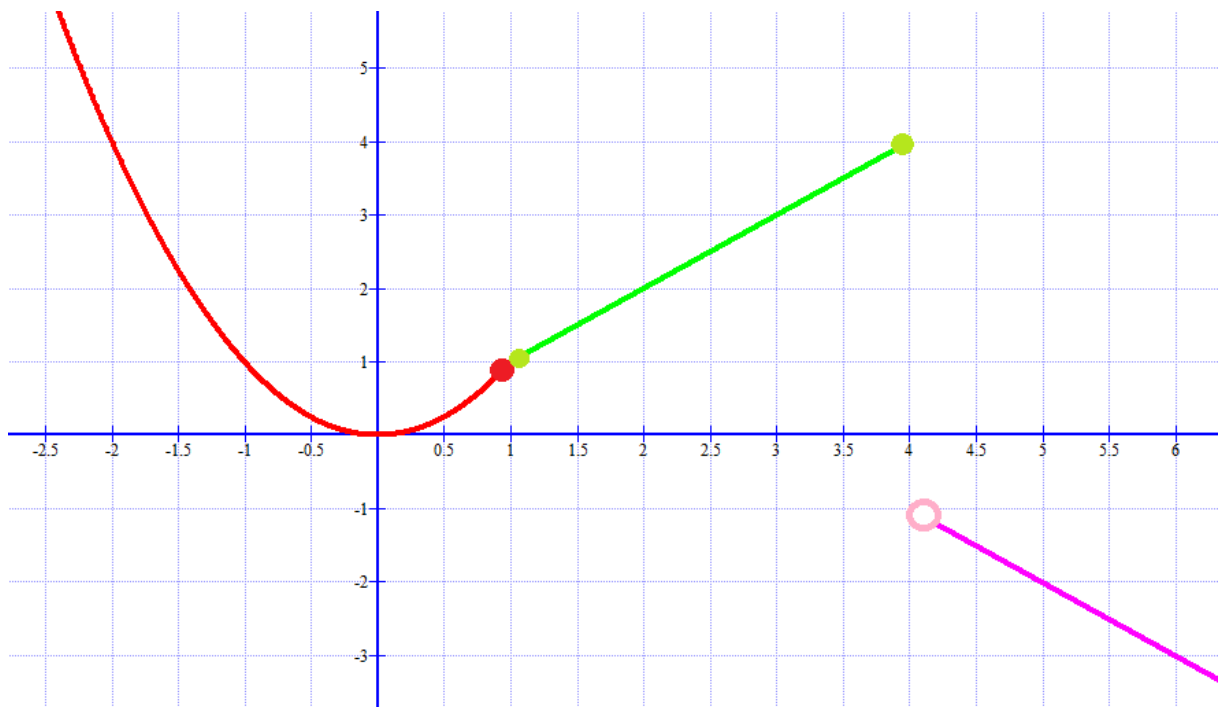
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x-1} - \sqrt{2x+2}} = \frac{0}{0}$$

Es indeterminado, por lo que multiplicaremos por su conjugada para levantar la indeterminada

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x-1} - \sqrt{2x+2}} = \\
& = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{2x-1})(\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x+2})}{(\sqrt{5x-1} - \sqrt{2x+2})(\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x+2})(\sqrt{x} + \sqrt{2x-1})} \\
& = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x+2})}{3(x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-1})} \\
& = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x+2})}{3(\sqrt{x} + \sqrt{2x-1})} \\
& = \frac{2+2}{3(1+1)} \\
& = -\frac{4}{6} \\
& = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$



Límites Laterales



Recordemos que el

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = N \end{cases} \text{ y } M = N = L$$

Límite por la Derecha:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{Dom}(f) \wedge -\delta < x - a < 0 \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límite por la Izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{Dom}(f) \wedge 0 < x - a < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ejercicios Resueltos de Límites Laterales

1) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; x \leq 1 \\ x & ; 1 < x \end{cases}$$

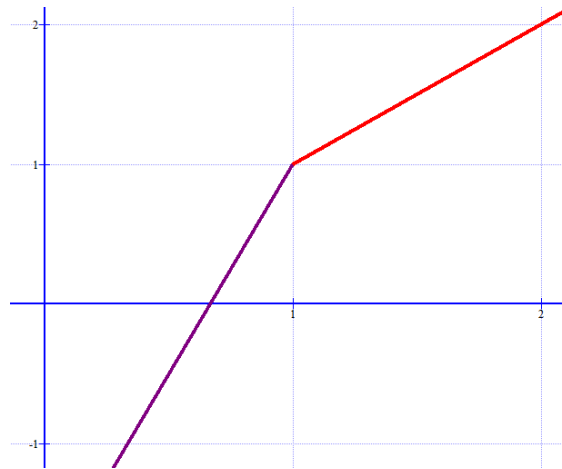
Hallar su límite si es que existe.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x - 2 = 1 \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



2) Sea

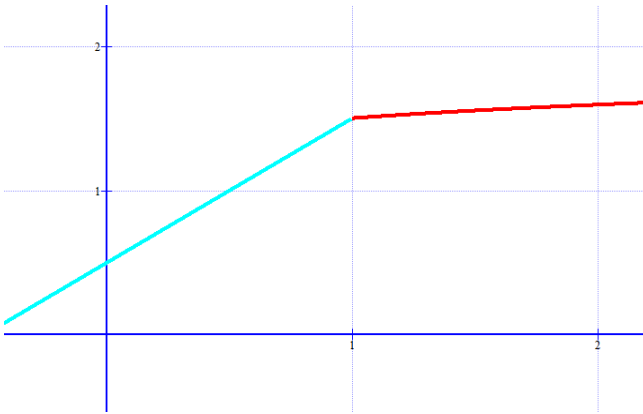
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} & x \geq 1 \\ \frac{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} & x < 1 \end{cases}$$

Hallar su límite si es que existe.

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - x)(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2x^2 - x - 1}{2}}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{2(x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2x + 1)(x - 1)}{2(x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 1}{2} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$



Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3/2$$

3) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & ; x \leq 0 \\ x + 2 & ; 0 < x \end{cases}$$

Hallar su límite si es que existe.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2$$

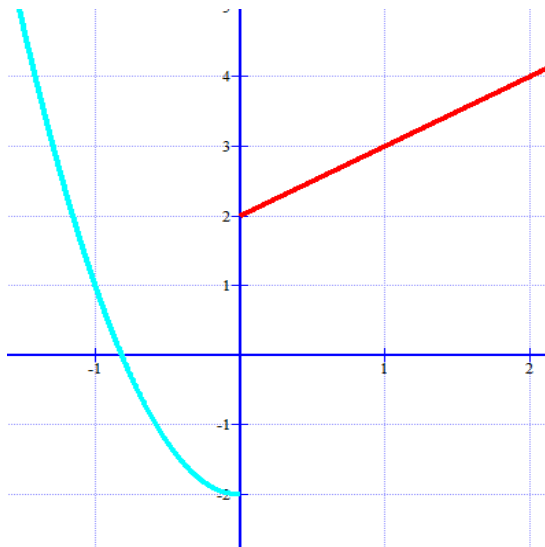
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - 2) = -2$$

Como los límites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Entonces el

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

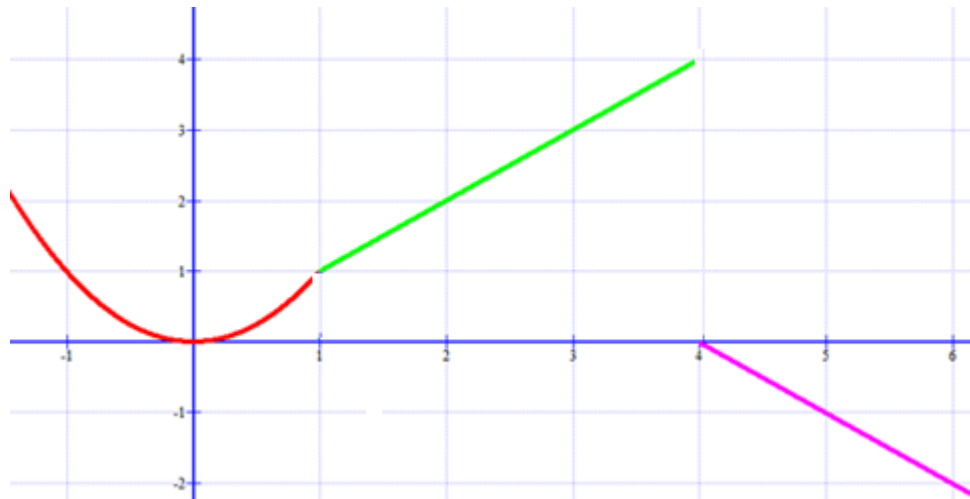


4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 1 \\ x & ; 1 < x < 4 \\ 4 - x & ; 4 < x \end{cases}$$

Hallar su límite si es que existe.

Solución:



Trabajaremos primero para el punto $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

Entonces el

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Y ahora para el punto $x = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (4 - x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x = 4$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

Entonces el

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ no existe}$$

5) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & ; x < 2 \\ 2x^2 - x - 3 & ; x > 2 \\ 6 & ; x = 2 \end{cases}$$

Hallar el límite si es que existe.

Solución:

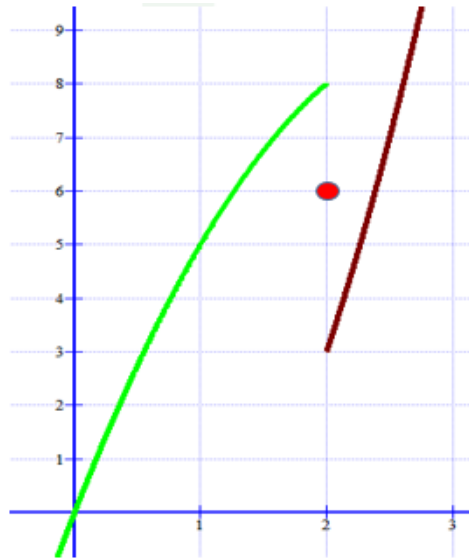
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - x - 3) \\ \quad = 8 - 2 - 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (6x - x^2) \\ \quad = 12 - 4 = 8 \end{cases}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Entonces el

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe}$$



6) Sea

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ab & ; x \geq 0 \\ 2\sqrt{x^2 + b} - b & ; x < 0 \end{cases}$$

Hallar a y b para que el límite exista y además cumple que $f(1) = 1$

Solución:

Puesto que

$$f(1) = 1$$

$$b + ab = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (bx^2 + ab) \\ \quad = ab \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2\sqrt{x^2 + b} - b) \\ \quad = 2\sqrt{b} - b \end{cases}$$

Igualando

$$2\sqrt{b} - b = ab$$

$$2\sqrt{b} = ab + b, \text{ pero como } b + ab = 1$$

$$(2\sqrt{b})^2 = 1^2$$

$$4b = 1$$

$$b = \frac{1}{4}$$

Y reemplazando en

$$b + ab = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{a}{4} = 1$$

$$1 + a = 4$$

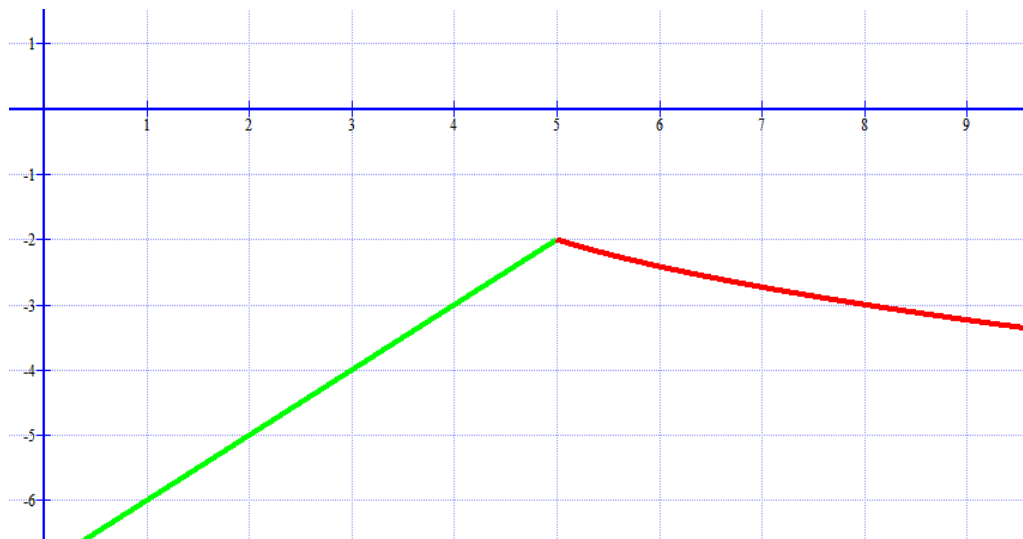
$$a = 3$$

7) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}, & x \geq 5 \\ \frac{x^2-12x+35}{x-5}, & x < 5 \end{cases}$$

Hallar el límite.

Solución:



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(1+\sqrt{x-4})}{(1-\sqrt{x-4})(1+\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(1+\sqrt{x-4})}{5-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5^+} -(1+\sqrt{x-4}) \\ &= -(1+1) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2-12x+35}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x-5)(x-7)}{(x-5)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5^-} (x - 7)$$

$$= 5 - 7 = -2$$

Entonces el

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$$

8) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & x < 3 \\ \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x - 2}, & x \geq 3 \end{cases}$$

Hallar el límite

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x - 2} = \frac{\sqrt{4} - 1}{3 - 2}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x^2 + x - 2)}{(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + x - 2)$$

$$= 9 + 3 - 2$$

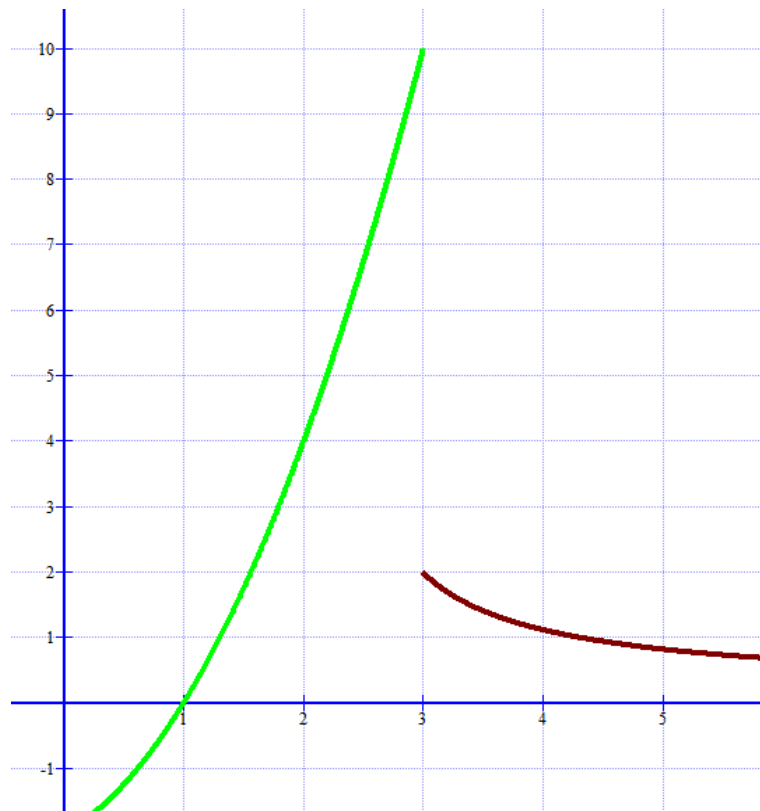
$$= 10$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

Entonces el límite de

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ no existe}$$



9) Sea

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3, & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & \text{si } 1 < x < 4 \\ 2ax - 3b, & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

Hallar a y b . Si el límite ya existe.

Solución:

Como el límite ya existe en $x = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}+1) \\ &= (1+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 3) \\ &= a + b + 3 \end{aligned}$$

Y como el

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Entonces

$$a + b + 3 = 2$$

$$a + b = -1 \quad \dots(1)$$

Y como también el límite ya existe en $x = 4$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} (2ax - 3b) \\ &= 8a - 3b \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4^-} (\sqrt{x}+1) \\
&= (2+1) = 3
\end{aligned}$$

Y como el

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

Entonces

$$3 = 8a - 3b \quad \dots (2)$$

Mostrando el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}
8a - 3b = 3 & \dots (1) \\
a + b = -1 & \dots (2)
\end{cases}$$

Multiplicando a la ecuación (2)

$$\begin{cases}
8a - 3b = 3 \\
3(a + b = -1)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
8a - 3b = 3 \\
3a + 3b = -3
\end{cases} \quad \downarrow (+)$$

$$11a = 0$$

$$a = 0$$

Reemplazando en

$$a + b = -1$$

$$b = -1$$

10) Sea

$$f(x) = \begin{cases}
ax^2 + bx + 1, & \text{si } x \leq 1 \\
2ax - b, & \text{si } 1 < x \leq 2 \\
x + 1, & \text{si } x > 2
\end{cases}$$

Hallarel valor de a y b para que exista los límites de $f(x)$ en $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

Veamos en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax - b) = 2a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 1) = a + b + 1$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

entonces

$$2a - b = a + b + 1$$

$$a - 2b = 1 \quad \dots (1)$$

Y veamos en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2ax - b) = 4a - b$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

entonces

$$4a - b = 3 \quad \dots (2)$$

Con (1) y (2)

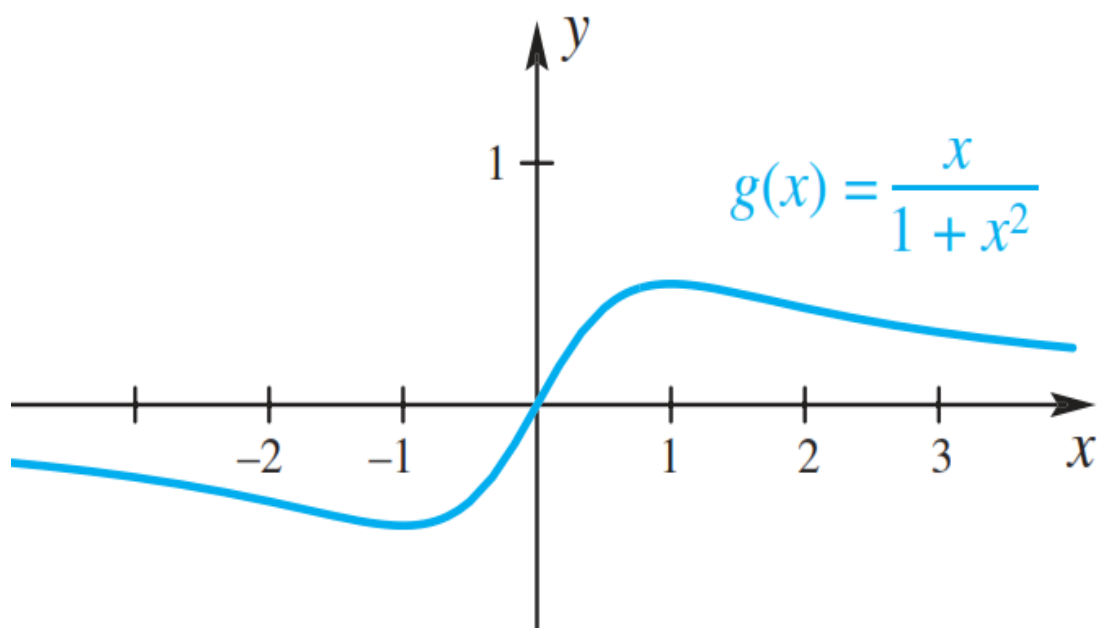
$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ 4a - b = 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que

$$a = 5/7$$

$$b = -1/7$$

Cálculo de Límites al Infinito



Recordemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x} = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x} = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ejercicios Resueltos de Límites al Infinito

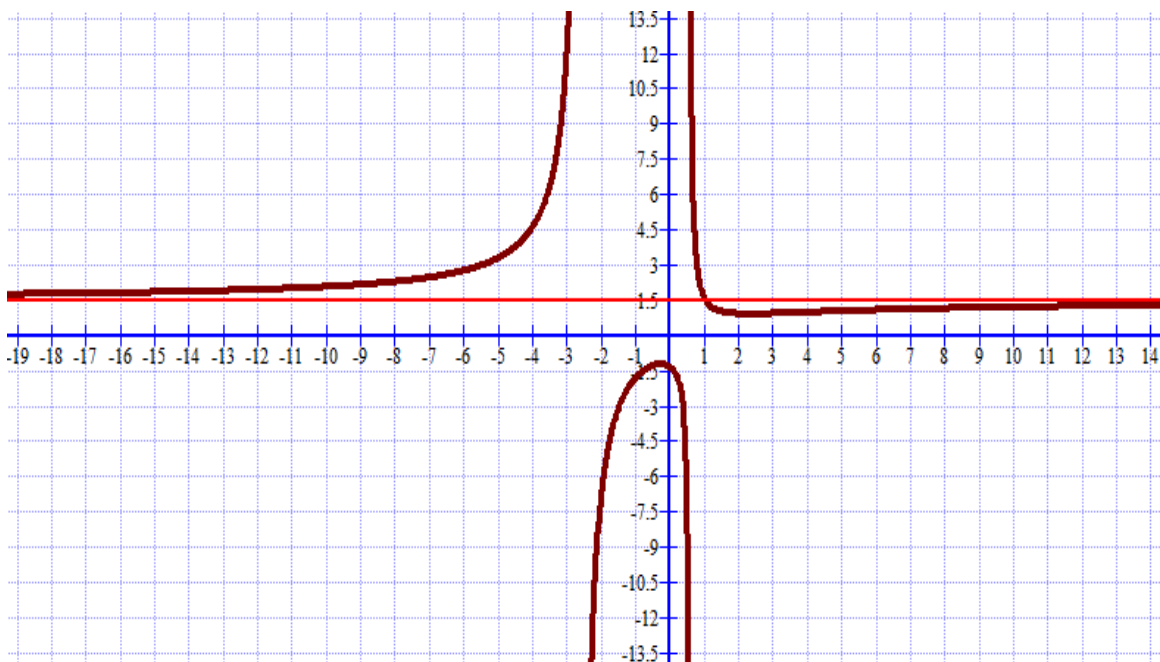
1) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4}{2x^2 + 4x - 3}$$

Solución:

El exponente mayor es 2, por lo que se divide por x^2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4}{2x^2 + 4x - 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{2 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



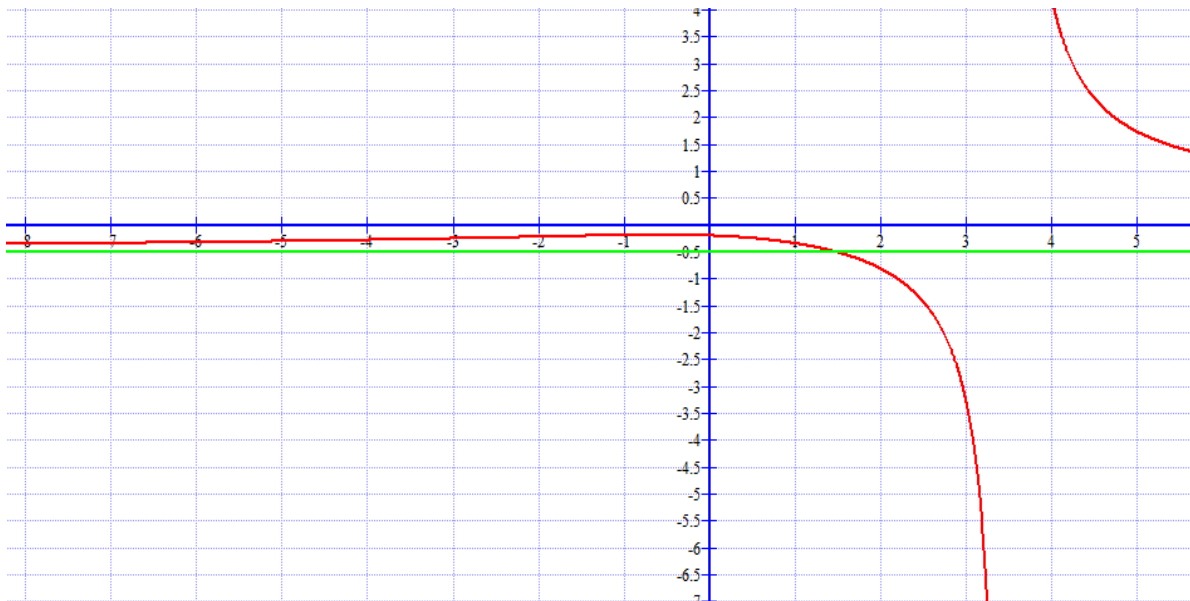
2) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2x - 7}$$

Solución:

Como $x = -\sqrt{x^2}$ cuando $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2x - 7} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 2}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{2x - 7}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2}}}{2 - \frac{7}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{2 - \frac{7}{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



3) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x + 6} - x$$

Solución:

Al evaluar se tiene

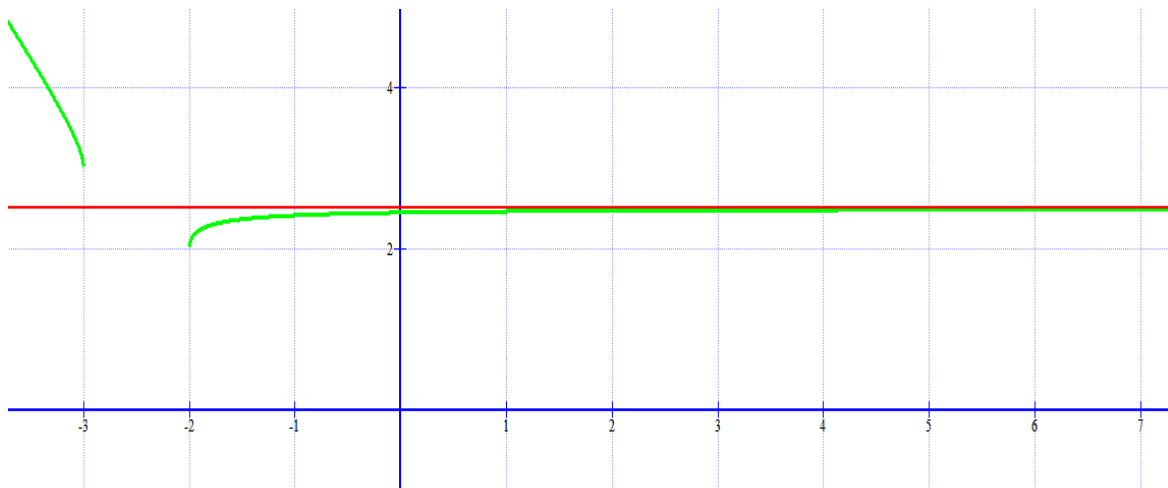
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x + 6} - x = \infty - \infty$$

Indeterminado, por lo que multiplicaremos por su conjugada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x + 6} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x + 6} - x)(\sqrt{x^2 + 5x + 6} + x)}{(\sqrt{x^2 + 5x + 6} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x + 6} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 6}{\sqrt{x^2 + 5x + 6} + x} \end{aligned}$$

Dividiremos por x

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x}{x} + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{x}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} + 1}} \\ &= \frac{5 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0 + 1}} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$



4) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

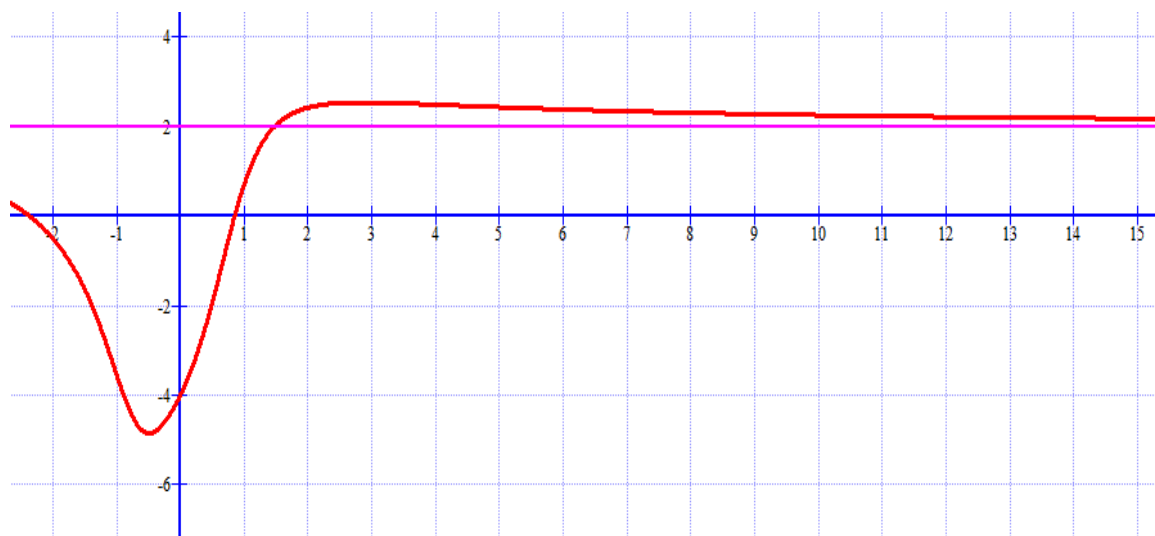
Solución:

Al evaluar se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Por lo que se dividirá al numerador y denominador por x^2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{(x^2)^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} \\ &= \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$



5) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 6} + x)$$

Solución:

Al evaluar el

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 6} + x)$$

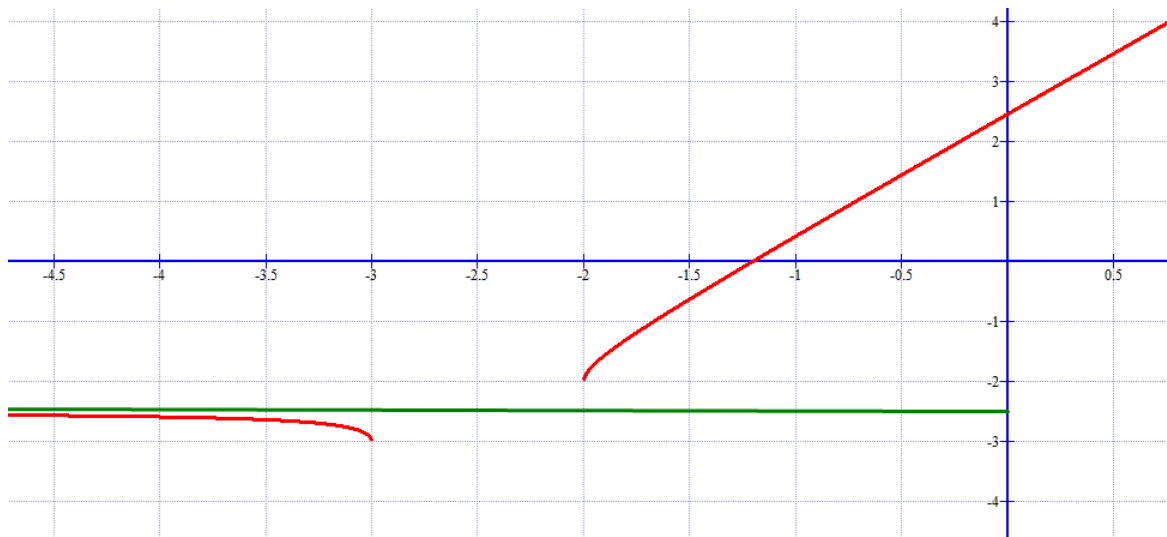
Se tiene $\infty - \infty$

Lo que es indeterminado, por lo que se multiplicará por su conjugada

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 6} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x + 6} + x)(\sqrt{x^2 + 5x + 6} - x)}{(\sqrt{x^2 + 5x + 6} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x + 6} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 6}{\sqrt{x^2 + 5x + 6} - x}\end{aligned}$$

Dividiremos entre x al numerador y denominador, recordando que $x = -\sqrt{x^2}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x}{x} + \frac{6}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}} - \frac{x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{6}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} - 1} \\ &= \frac{5}{-\sqrt{1 + 0 + 0} - 1} \\ &= \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$



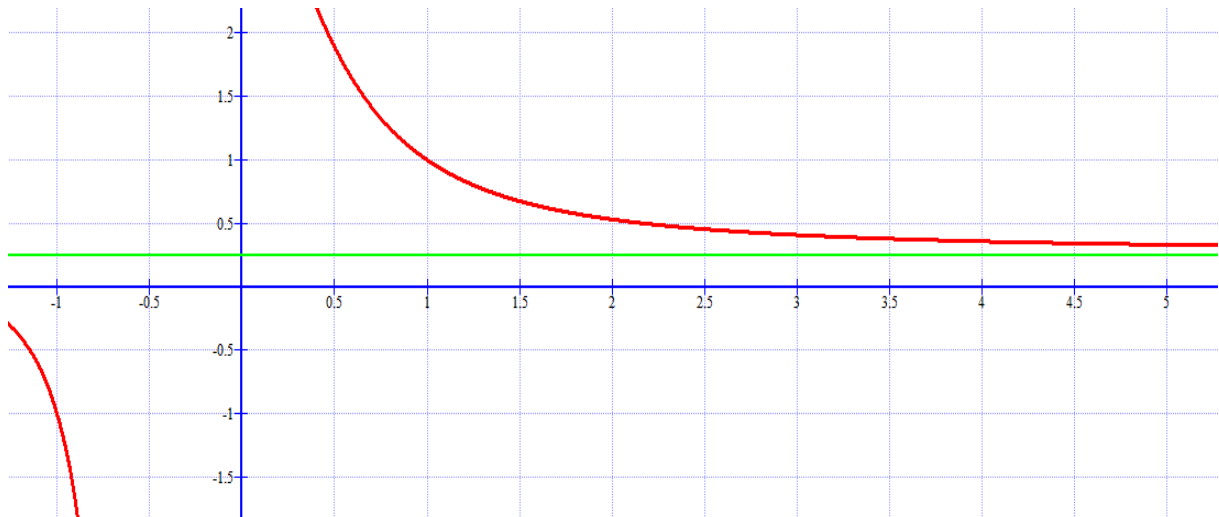
6) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$$

Solución:

Dividiendo todos los términos tanto del numerador como del denominador por x^3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^3}}{\frac{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1 + 0 + 0 + 0}{4 + 0 + 0 + 0} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$



7) Resolver el

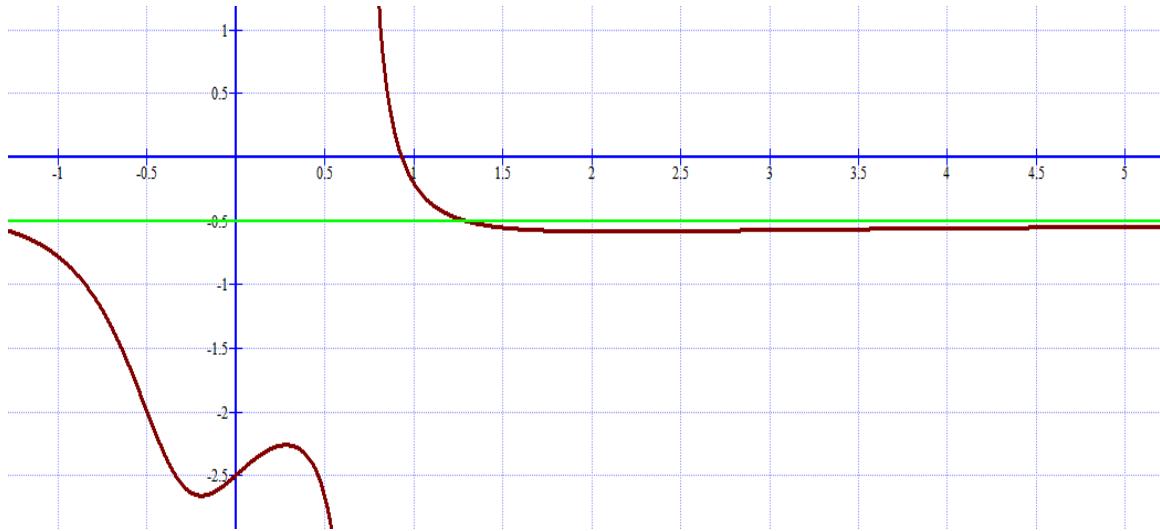
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{-8x^3 + x + 2}$$

Solución:

Dividiendo todos los términos tanto del numerador como del denominador por x^3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{-8x^3 + x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{x^3}}{\frac{-8x^3 + x + 2}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^3}}{-8 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4 + 0 - 0}{-8 + 0 - 0} \\
 &= -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



8) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 3}$$

Solución:

Al evaluar se tiene

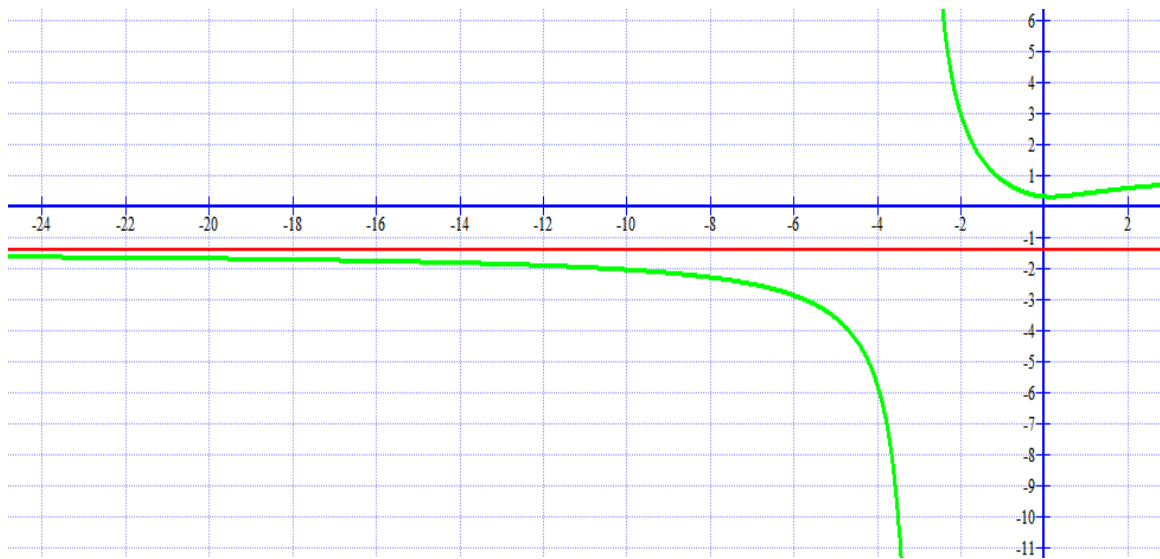
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminado, por lo que dividiremos entre x al numerador y denominador, recordando que

$$-x = \sqrt{x^2} \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{x + 3}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2}}}{1 + \frac{3}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{3}{x}}
 \end{aligned}$$

$$= -\sqrt{2}$$



9) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^4 + x^2} - x}$$

Solución:

Al evaluar se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^4 + x^2} - x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x al numerador y denominador

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^4 + x^2} - x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^2}}{x} - \frac{x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^2}}{\sqrt[4]{x^4}} - \frac{x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2}} - 1} \\ &= \frac{1 + 0}{1 - 1} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{0} = \infty$$

10) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^3 + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Solución:

Al evaluar se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^3 + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminado, por lo que dividiremos por x al numerador y denominador

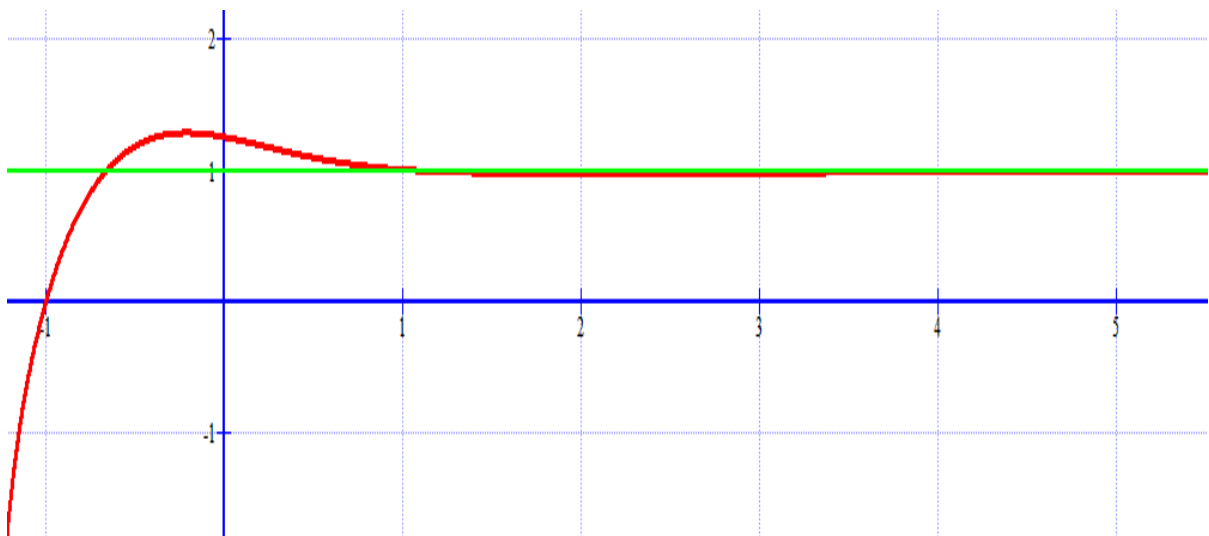
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^3 + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x + \sqrt[3]{x^3 + 2}}{x}}{\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}}$$

Recordando que $x = \sqrt{x^2}$ y $x = \sqrt[3]{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2}{x^3}}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt[3]{1}}{1 + \sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1$$



11) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{4x^2 - 2}}$$

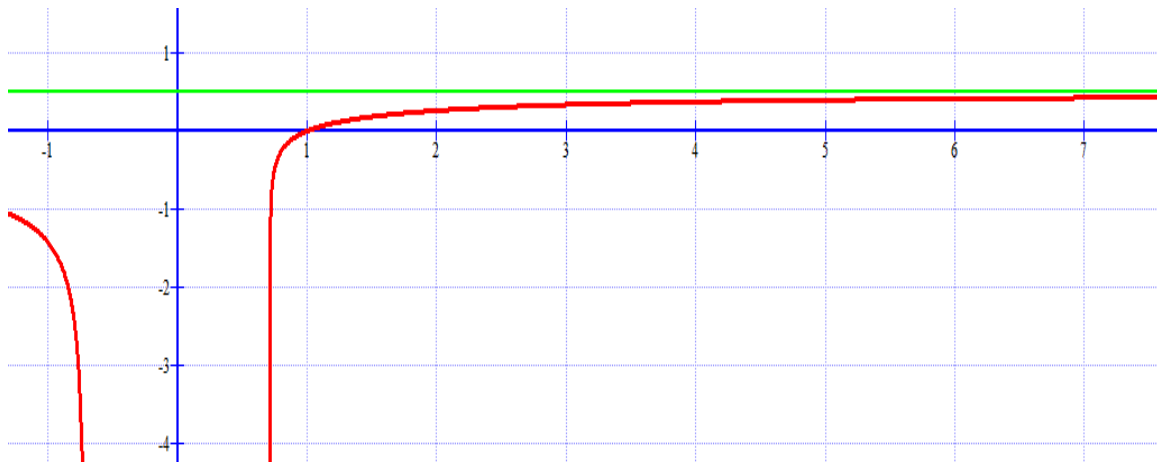
Solución:

Al evaluar se tiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{4x^2 - 2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminado, por lo que dividiremos por $x = \sqrt{x^2}$ al numerador y denominador

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{4x^2 - 2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2 - 2}}{\sqrt{(x)^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{2}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



12) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 9})$$

Solución:

Al evaluar se tiene

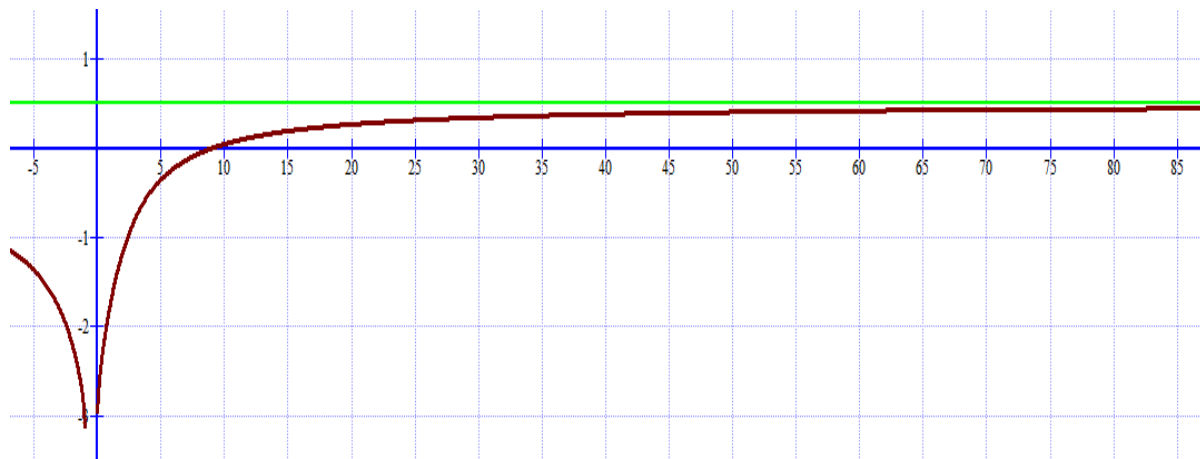
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 9}) = \infty - \infty$$

Indeterminado, por lo que multiplicaremos por su conjugada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 9}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 9})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 9})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 9}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - (x^2 + 9)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 9}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 9}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 9}} \end{aligned}$$

Ahora dividiremos por x

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{9}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{(x)^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{9}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{9}{x}}} \\ &= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



13) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$$

Solución:

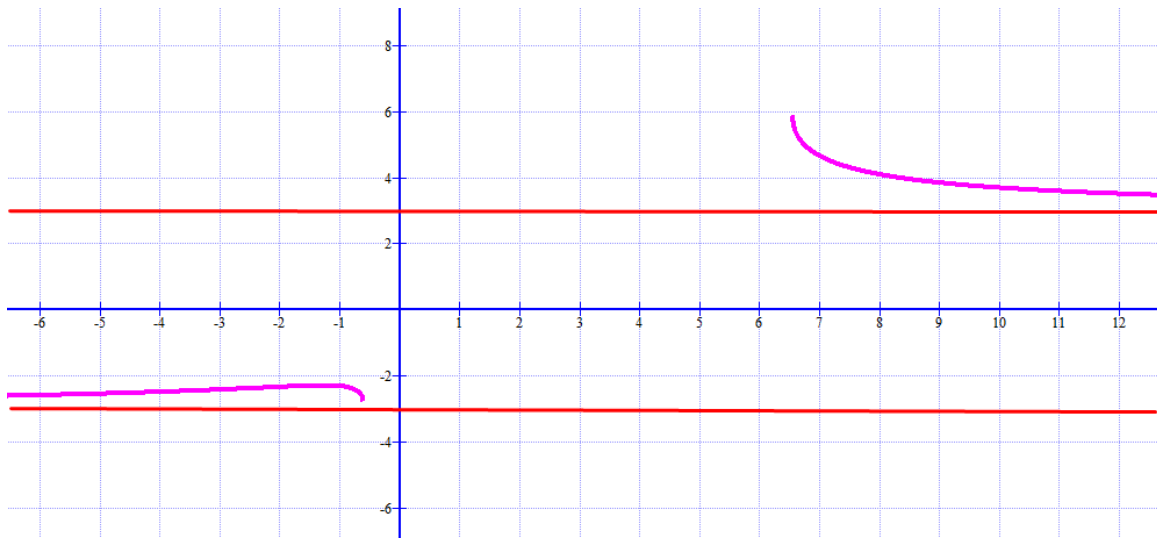
Al evaluar

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}) = \infty - \infty$$

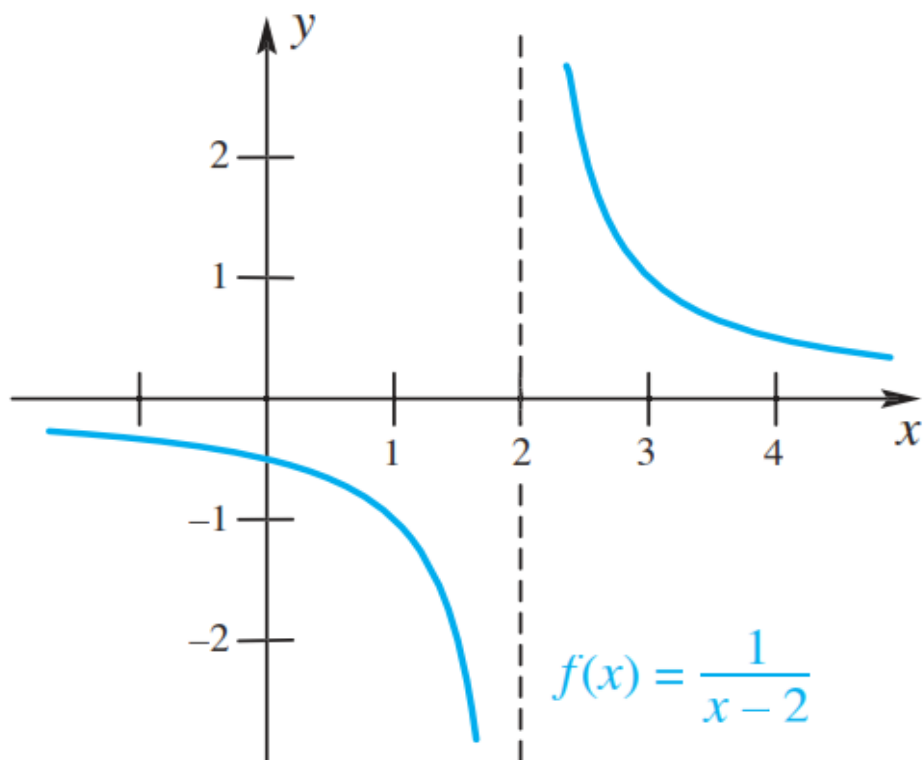
es indeterminado, por lo que multiplicaremos por su conjugada

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})(\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3})}{\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x - 1 - x^2 + 7x - 3}{\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x - 4}{\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{6x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - x - 1}}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 3}}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6 - \frac{4}{x}}{\pm \left(\sqrt{\frac{x^2 - x - 1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 3}{x^2}} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6 - \frac{4}{x}}{\pm \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} \\
&= \frac{6}{\pm(1+1)} = \pm \frac{6}{2} \\
&= \pm 3
\end{aligned}$$



Límites Infinitos



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$$

Ejercicios Resueltos de Límites Infinitos

1) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x - 5}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x - 5} &= \frac{1}{5 - 5} \\ &= \frac{1}{0} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

2) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} \\ &= \frac{1}{2 - 2} = \frac{1}{0} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

3) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{\frac{(x+3)}{(x-3)}} \\
&= \sqrt{\frac{6}{0}} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

4) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right)$$

Solución:

Al evaluar el

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{0} \right) \\
&= \infty - \infty
\end{aligned}$$

Indeterminado, por lo que se harán las respectivas operaciones

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1 - (1-x)}{(1-x)(x^2 - 2x + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{(1-x)(x-1)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{(1-x)(x-1)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)(1-x)} \\
&= \frac{1}{0} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

5) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 + 9x^2 + 20x}{x^2 + x - 12}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 + 9x^2 + 20x}{x^2 + x - 12} &= \frac{222}{0} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

6) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x}{9 - x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x}{9 - x^2} = \frac{12}{9 - 9} = -\infty$$

7) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} \\ &= \frac{1}{2 - 2} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

8) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{x + 4}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{x + 4} &= \frac{-4}{-4 + 4} \\ &= \frac{-4}{0} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

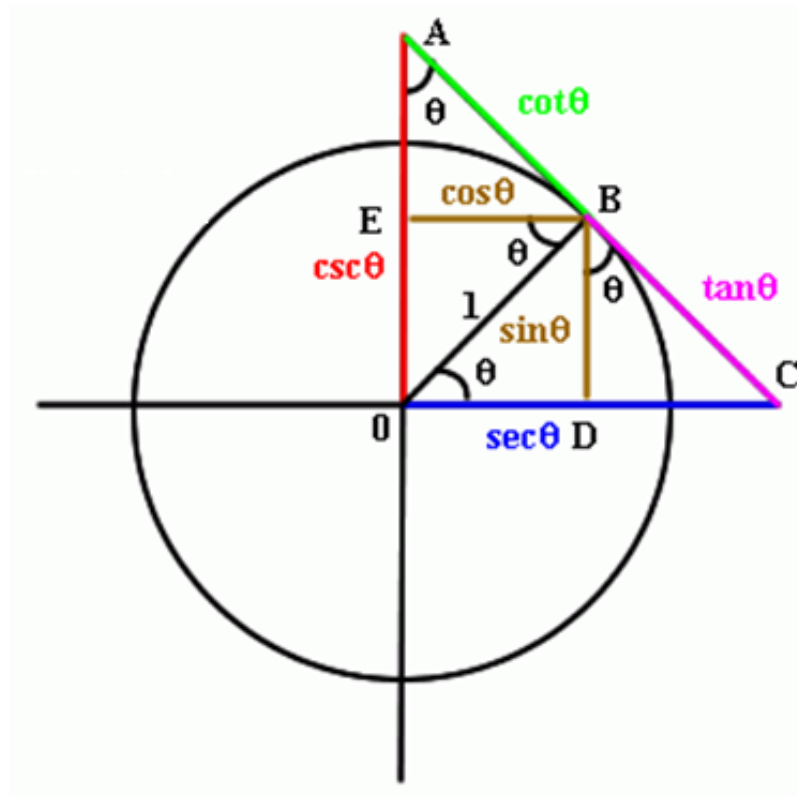
9) Resolver el

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}} \\ &= \sqrt{\frac{6}{0}} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Límites de Funciones Trigonométricas



Recordando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Usaremos también

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen}A \cdot \text{cos}B + \text{sen}B \cdot \text{cos}A$$

$$\text{sen}(A - B) = \text{sen}A \cdot \text{cos}B - \text{sen}B \cdot \text{cos}A$$

$$\text{cos}(A + B) = \text{cos}A \cdot \text{cos}B - \text{sen}A \cdot \text{sen}B$$

$$\text{cos}(A - B) = \text{cos}A \cdot \text{cos}B + \text{sen}A \cdot \text{sen}B$$

Ejercicios Resueltos de Límites Trigonométricos

1) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x + \operatorname{sen}(3x)}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x + \operatorname{sen}(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x}}{\frac{x + \operatorname{sen}(3x)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}} \\ &= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}} \\ &= \frac{1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{1 + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}} \\ &= \frac{1 - 2 \cdot 1}{1 + 3 \cdot 1} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

2) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}(x)} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)}}{x}$$

Solución:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \operatorname{sen}(x)} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)}) (\sqrt{1 + \operatorname{sen}(x)} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)})}{x(\sqrt{1 + \operatorname{sen}(x)} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{sen}(x) - 1 + \operatorname{sen}(x)}{x[\sqrt{1 + \operatorname{sen}(x)} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)}]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}(x)} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)}} \\
&= 1 \cdot \frac{2}{1 + 1} = 1
\end{aligned}$$

3) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} \\
&= 1 * \frac{1}{2 * 2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

4) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{1 - \cos(x)}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{1 - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(x + x)}{1 - \cos(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{1 - \cos(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)[1 - \cos(x)] + 1 - \cos^2(x)}{1 - \cos(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)[1 - \cos(x)] + [1 - \cos(x)][1 + \cos(x)]}{1 - \cos(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos(x)][\cos(x) + 1 + \cos(x)]}{1 - \cos(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x) + 1 + \cos(x)] \\
&= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

5) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \cdot \frac{1}{(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{(1 + \cos x)} \\
&= 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

6) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} 5x}{2x + \operatorname{sen} 6x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} 5x}{2x + \operatorname{sen} 6x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x} - \frac{5 \operatorname{sen} 5x}{5x}}{\frac{2x}{x} + \frac{6 \operatorname{sen} 6x}{6x}} \\
&= \frac{1 - 5}{2 + 6}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-4}{8}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

7) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(3x)}{\cos(3x)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x \cos(3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{sen}(3x)}{3x} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

8) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(3x)}{\text{sen}(4x) + \text{sen}(5x)}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(3x)}{\text{sen}(4x) + \text{sen}(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(2x)}{x} + \frac{\text{sen}(3x)}{x}}{\frac{\text{sen}(4x)}{x} + \frac{\text{sen}(5x)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\text{sen}(2x)}{2x} + 3 \frac{\text{sen}(3x)}{3x}}{4 \frac{\text{sen}(4x)}{4x} + 5 \frac{\text{sen}(5x)}{5x}} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{4 \cdot 1 + 5 \cdot 1} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

9) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} 3x}{x + \operatorname{sen} 2x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} 3x}{x + \operatorname{sen} 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right)}{x \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(1 - 3 \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{x \cdot \left(1 + 2 \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - 3 \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{\left(1 + 2 \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)} \\ &= \frac{1 - 3}{1 + 2} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

10) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} - \operatorname{sen} x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} (1 - \operatorname{cos} x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{cos} x)}{x^3 \operatorname{cos} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1 - \operatorname{cos} x}{x^2} \frac{1}{\operatorname{cos} x} \\ &= 1 \left(\frac{1}{2}\right) 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

11) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 2x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen } 3x}{x}}{\frac{\text{sen } 2x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\text{sen } 3x}{3x}}{2 \frac{\text{sen } 2x}{2x}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

12) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

13) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\text{sen } 4x)}{\text{sen}(\text{sen } 3x)}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\text{sen } 4x)}{\text{sen}(\text{sen } 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(\text{sen } 4x)}{\text{sen } 4x} \frac{\text{sen } 4x}{4x} (4x)}{\frac{\text{sen}^2(\text{sen } 3x)}{\text{sen}^2(3x)} (3x^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0.1.0}{1.(3.0^2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

14) Hallar el

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot \cos h + \text{sen } h \cdot \cos x - \text{sen } x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \frac{\text{sen } h}{h} \cos x \\
&= \text{sen } x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

15) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - \cos 3x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{x^2(1 + \cos 3x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} + \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos 3x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} + \frac{\text{sen}^2 3x}{3^2 x^2} \cdot \frac{9}{1 + \cos 3x} \\
&= -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{9}{2} \\
&= \frac{8}{2} \\
&= 4
\end{aligned}$$

16) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$$

Solución:

Al evaluar tendremos

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{1 - 1}{(0)^2} = \frac{0}{0}$$

Lo que significa que es indeterminado.

Para levantar la indeterminada usaremos cambio de variables; es decir:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$$

$$x - \frac{\pi}{2} = y$$

Es decir,

$$y \rightarrow 0$$

Pero:

$$x = y + \frac{\pi}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} &= \lim_{y + \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - \left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - y - \frac{\pi}{2}\right)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{(-y)^2} \end{aligned}$$

Aquí usaremos

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}A \cdot \cos B + \operatorname{sen}B \cdot \cos A$$

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}A \cdot \cos B - \operatorname{sen}B \cdot \cos A$$

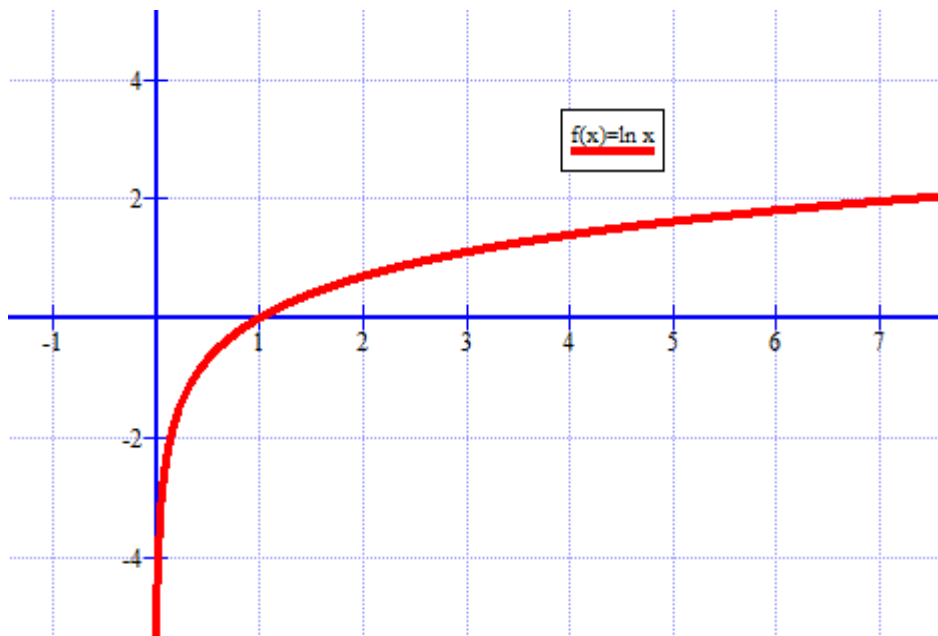
$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B$$

$$\cos(A - B) = \operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B + \cos A \cdot \cos B$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - [\text{sen} y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{cos} y]}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - [\text{sen} y \cdot 0 + 1 \cdot \text{cos} y]}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos} y}{y^2} \cdot \frac{1 + \text{cos} y}{1 + \text{cos} y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos}^2 y}{y^2} \cdot \frac{1}{1 + \text{cos} y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 y}{y^2} \cdot \frac{1}{1 + \text{cos} y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen} y}{y}\right)^2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \text{cos} y} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Límites Exponenciales y/o de la Forma Indeterminada



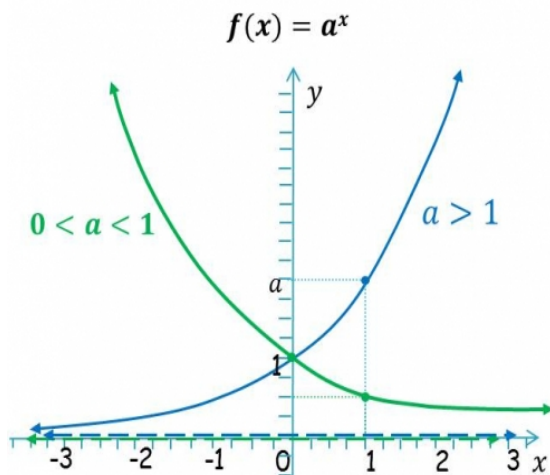
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$$\text{Obs: } \ln e^x = x \text{ y } e^{\ln x} = x$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

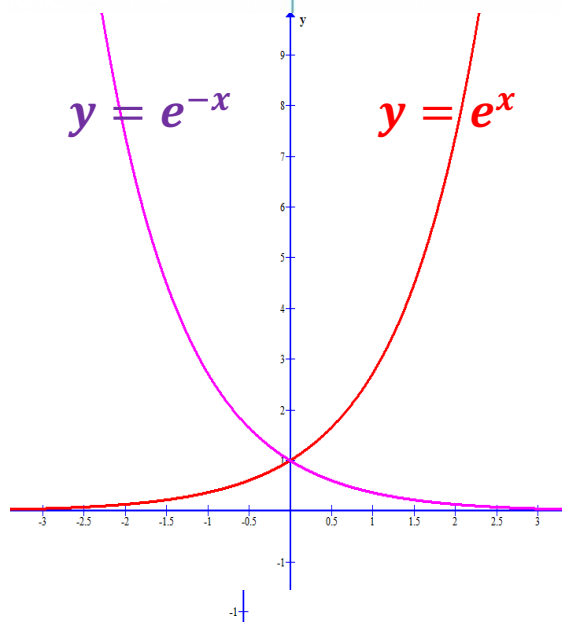
$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

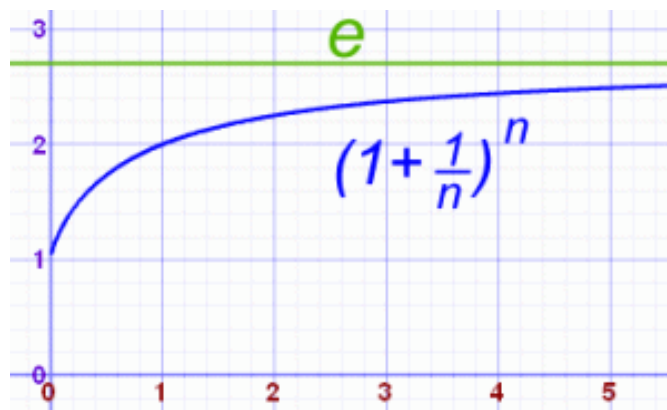
$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Número e:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$



Para el cálculo de los límites de la forma $f(x)^{g(x)}$ se tienen los tres casos:

Caso 1: Si existen los $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ y son finitos; entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = A^B$$

Caso 2: Si existen los $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$; entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \text{inmediato}$$

Caso 3: Si existen los $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = 1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$; entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = 1^{\pm\infty} \text{ indeterminado}$$

Para levantar la indeterminada, tenemos que hacer:

A la función $f(x)$ haremos que sea de la forma

$$f(x) = 1 + \theta(x)$$

Donde

$$\lim_{x \rightarrow a} \theta(x) = 0$$

y al reemplazar se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} [(1 + \theta(x))^{\frac{1}{\theta(x)}}]^{g(x) \cdot \theta(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \theta(x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \theta(x)} \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos de Límites Exponenciales y/o de la Forma Indeterminada

1) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\text{sen}x}{x}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\text{sen}x}{x}} &= \left(\frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 3}{0^2 - 3 \cdot 0 + 2} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}} \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln(a)}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln(a)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a+x}{a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) \ln \left(1 + \frac{x}{a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{\frac{a}{x} \cdot \frac{1}{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln e^{\left(\frac{1}{a}\right)} \\
 &= \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

3) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{1/x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - 2x)^{-\frac{1}{2x}} \right]^{-2} \\
 &= e^{-2}
 \end{aligned}$$

4) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1-x} + \frac{2x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^{\left(\frac{1-x}{2x}\right) \left(\frac{2x}{1-x}\right) \left(\frac{1}{x}\right)} \\
 &= \frac{1}{2} \ln e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1-x}\right)} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

5) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{x-2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{x-2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{5}{x+1} \right)^{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x+1} \right)^{\left(\frac{x+1}{-5} \right) \cdot \left(\frac{-5}{x+1} \right) (x-2)} \\ &= e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} -5 \left(\frac{x-2}{x+1} \right) \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -5 \left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} \right)} \\ &= e^{-5 \cdot 1} \\ &= e^{-5} \end{aligned}$$

6) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x + 3}{x^3 + 4} \right)^{\frac{1-x^3}{x}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x + 3}{x^3 + 4} \right)^{\frac{1-x^3}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^3 + 4} + \frac{-4 + 2x + 3}{x^3 + 4} \right)^{\frac{1-x^3}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{x^3+4} \right)^{\frac{1-x^3}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{x^3+4} \right)^{\frac{1-x^3}{x}} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{x^3+4} \right)^{\frac{x^3+4}{2x-1}} \right]^{\frac{(2x-1)(1-x^3)}{(x^3+4)x}} \\ &= e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)(1-x^3)}{(x^3+4)x} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-\frac{1}{x})(\frac{1}{x^3}-1)}{1+\frac{4}{x^3}}} \\
&= e^{2(-1)} \\
&= e^{-2}
\end{aligned}$$

7) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} \right] \\
&= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2+1}{-2}} \right]^{\frac{-2}{x^2+1} \cdot \frac{x-1}{x+1}} \\
&= e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x^2+1} \cdot \frac{x-1}{x+1} \right)} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} \right) \left(\frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} \right)} \\
&= e^{0 \cdot (1)} \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

8) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^{\frac{\text{sen}(x)}{x - \text{sen}(x)}}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^{\frac{\text{sen}(x)}{x - \text{sen}(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\text{sen}(x)}{x} - 1 \right)^{\frac{\text{sen}(x)}{x - \text{sen}(x)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x} \right)^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x - \operatorname{sen}(x)}} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x} \right)^{\frac{x}{\operatorname{sen}(x) - x}} \right]^{-\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \\
&= e^{(-1)} = e^{-1} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

9) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x}$$

Solución:

Sea

$$z = 7^x - 1$$

$$z + 1 = 7^x$$

$$\ln(z + 1) = \ln 7^x$$

$$\ln(z + 1) = x \ln 7$$

$$\frac{\ln(z + 1)}{\ln 7} = x$$

Como

$$x \rightarrow 0$$

entonces

$$z = 7^x - 1$$

$$z \rightarrow 7^0 - 1$$

$$z \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z + 1)}{\ln 7}} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln 7}{\ln(z + 1)} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln 7}{\frac{\ln(z + 1)}{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln 7}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} \\
&= \frac{\ln 7}{\ln e} \\
&= \ln 7
\end{aligned}$$

10) Hallar el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+2} + \frac{-2-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{3x+2} \right)^{\left(\frac{3x+2}{-6} \right) \left(\frac{-6}{3x+2} \right) \cdot \frac{x+1}{3}} \\
&= e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} -2 \cdot \frac{x+1}{3x+2} \right)} \\
&= e^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Referencias Bibliográficas

- Arce, A. (2014) *Cálculo Diferencial e Integral de Varias Variables Independientes y sus Aplicaciones*. Vol. 1. Lima, Perú: Ediciones Moshera, S.R.L.
- Granville, W. (2015) *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Editorial Limusa.
- Espinoza, E. (2012) *Análisis Matemático I para estudiantes de ciencias e ingeniería*. (Sexta edición). Lima: Ediciones Edukperú.
- Eves, H. (1990). *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* (Tercera edición). Dover.
- Hazewinkel, M. ed. (2000). *Encyclopaedia of Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Haeussler, E.; Richard, S. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. Decima edición. <http://fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar/~morellana/Matematicas-para-la-Administracion-y-Economia-Haeussler-Richard.pdf>
- Leithold, L. (1998). *Cálculo con geometría analítica*. <https://luiscastellanos.files.wordpress.com/2007/02/calculo-louis-leithold.pdf>
- Masjuan G; Arenas F; Villanueva F. (2017) *Trigonometría y Geometría Analítica*. Universidad Católica de Chile.
- Oltmanns W. (2015). *Cálculo Integral*. Primera Edición
- Ruiz J. (2016) *Matemáticas 3: Geometría analítica básica*. Grupo editorial Patria. Segunda edición ebook.
- Soler Dorda, M. (2014). *CÁLCULO I*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A., 263 p.
- Stewart J. (2014). *Cálculo Vol. I*. Traducción de Séptima edición norte americana. Cengage Learning.
- Stewart J. (2014). *Cálculo Vol. II*. Traducción de Séptima edición norte americana. Cengage Learning.
- Stewart, J.; Redlin L; Watson S. (2014). *PRECÁLCULO: matemáticas para el cálculo*. Sexta edición.- México: Cengage Learning Editores, P-4, 889 p. R-76; I-13
- Zill D.; Wright W. (2014). *Matemáticas 1, Cálculo Diferencial*. Mc Graw Hill. Segunda Edición.

Imágenes descargado de:

Fuente: <https://concepto.de/funcion-matematica/#ixzz6pR4WfPHV>

Fuente: <https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/tipos-funciones/>

Fuente: <https://www.fisicalab.com/apartado/funciones-valor-absoluto>

Fuente: <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/funcion-cuadratica.html>

Fuente: <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/funcion-valor-absoluto.html>

Fuente: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/absolute-value-functions

Programa de aplicación graph descargado de:

<https://graph.uptodown.com/windows>

ColloQUIUM

Editorial - Centro de Formación

ISBN: 978-9942-600-09-7



9 789942 600097